

---

# Caracterización frecuencial de señales discretas: la TFSD y las series discretas de Fourier

---

PID\_00262129

Jose Antonio Morán Moreno

---

Tiempo mínimo de dedicación recomendado: 4 horas

---



**Jose Antonio Morán Moreno**

# Índice

<b>Introducción.....</b>	<b>5</b>
<b>Objetivos.....</b>	<b>6</b>
<b>1. La transformada de Fourier de secuencias discretas TFSD.....</b>	<b>7</b>
1.1. Relación entre la transformada $z$ y la TFSD .....	7
1.2. Ecuaciones de cálculo de la TFSD .....	8
1.3. Condiciones de existencia de la TFSD .....	9
<b>2. TFSD de señales discretas típicas.....</b>	<b>10</b>
2.1. Señal delta discreta .....	10
2.2. Señal exponencial decreciente discreta orientada a la derecha ..	11
2.3. Señal pulso rectangular centrado en el origen .....	11
2.4. Señal constante .....	12
2.5. Señal escalón unitario .....	13
<b>3. Propiedades de la TFSD.....</b>	<b>15</b>
3.1. Periodicidad de la TFSD .....	15
3.2. Linealidad de la TFSD .....	15
3.3. Desplazamiento en el tiempo .....	16
3.4. Propiedad de modulación o desplazamiento en frecuencia .....	17
3.5. Diferenciación en el tiempo .....	17
3.6. Acumulación en el tiempo .....	18
3.7. Inversión en el tiempo .....	19
3.8. Expansión en el tiempo .....	19
3.9. Diferenciación en frecuencia .....	20
3.10. El teorema de Parseval .....	21
3.11. La propiedad de la convolución .....	21
3.12. Multiplicación en el tiempo .....	22
3.13. Propiedades de simetría de la TFSD .....	23
<b>4. La serie discreta de Fourier (SDF).....</b>	<b>24</b>
4.1. Los coeficientes de la SDF (serie discreta de Fourier) .....	24
4.2. Propiedades de las SDF .....	29
<b>5. La TFSD de señales periódicas discretas.....</b>	<b>31</b>
<b>6. Caracterización de sistemas LIT digitales mediante la TFSD.</b>	<b>33</b>
6.1. Función de transferencia de un sistema LIT digital .....	33
6.2. Representación en módulo y fase de la TFSD .....	34
6.2.1. El módulo de la función de transferencia .....	36

6.2.2. La fase de la función de transferencia .....	39
<b>Resumen</b> .....	49

## Introducción

En el primer módulo de la asignatura se ha visto en profundidad la transformada  $z$ . Este módulo está orientado a iniciar el análisis frecuencial de las señales y sistemas en tiempo discreto, lo que, como es bien sabido, resulta un espacio de análisis de gran utilidad en la teoría de señales y sistemas. A lo largo de módulo se irá viendo que la transformada de Fourier de secuencias discretas, o TFSD, como utilizaremos de ahora en adelante, no es más que una particularización de la transformada  $z$ . Este paralelismo se vio en la asignatura de Señales y sistemas I con la transformada de Laplace y la transformada de Fourier analógica.

El dominio transformado facilita enormemente el análisis y diseño de señales y sistemas, tanto en el caso de señales y sistemas analógicos como de tiempo discreto. El conocimiento de estas herramientas es fundamental para el desarrollo de habilidades y competencias en el campo del procesamiento de señal.

Este módulo presentará las principales características y propiedades de la TFSD, así como las aplicaciones que de ella podemos tener en el ámbito del procesamiento de señal.

## Objetivos

Los principales objetivos de este módulo son los siguientes:

- 1.** Conocer la definición de la TFSD, así como su relación con la transformada  $z$ .
- 2.** Aprender a calcular la TFSD de las señales típicas aperiódicas más utilizados en el ámbito de procesado de señal.
- 3.** Conocer y aplicar convenientemente las principales propiedades matemáticas de la TFSD.
- 4.** Calcular la TFSD de señales discretas periódicas extendiendo así el uso de esta útil herramienta de cálculo.
- 5.** Aplicar los conocimientos y propiedades de la TFSD para la caracterización y diseño de sistemas LIT digitales.

## 1. La transformada de Fourier de secuencias discretas TFSD

En este apartado se verán las principales características de la transformada de Fourier en el espacio de las señales discretas en el tiempo. A lo largo del módulo se recordará por qué las exponenciales complejas o el dominio de Fourier resultan tan interesantes en el estudio de las señales y los sistemas. Recordemos que las exponenciales complejas son autofunciones de los sistemas lineales e invariantes en el tiempo, factor que ocurre tanto en el dominio analógico como en el dominio discreto, siendo esta la principal característica que justifica la utilidad del estudio frecuencial en este tipo de sistemas. Este hecho implica que cuando a la entrada de un sistema tenemos una exponencial compleja determinada, la salida del sistema (si es lineal e invariante en el tiempo) será una exponencial exactamente de la misma frecuencia, pero modificada únicamente en amplitud y en fase. Lo más interesante de este hecho es que se produce en cualquier tipo de sistema lineal e invariante, de hecho, siempre que estudiemos estos sistemas en el dominio frecuencial se producirá este efecto.

### 1.1. Relación entre la transformada $z$ y la TFSD

En el primer módulo de la asignatura se estudió con detalle la transformada  $z$  con todas sus propiedades y características. Antes de empezar a detallar la TFSD se verá la relación existente entre cada una de las transformadas para ver que la TFSD no es más que una particularidad de la TZ cuando se cumplen ciertas características entre las señales y sistemas implicados.

Recordando la definición de TZ:

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z) \quad (1)$$

y su análisis en el plano complejo:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n](re^{j\omega})^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]r^{-n}e^{-j\omega n} \quad (2)$$

Se observa que la TZ realiza una proyección de la señal de entrada  $x[n]$  sobre la totalidad del plano complejo  $z$ . De todas las circunferencias de radio  $r$  donde se realiza la proyección, hay una que resulta de especial interés y que corresponde al círculo unidad o  $r = 1$ . El estudio de la transformada  $z$  y sus propiedades muestra que la estabilidad de un sistema se produce cuando la región de convergencia incluye el círculo unidad, y este hecho hace que el círculo unidad sea un espacio de estudio de especial interés en el análisis y diseño de sistemas.

Para el caso de señales aperiódicas, la TFSD se define según:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} \quad (3)$$

Donde se observa una correspondencia entre la TZ y la TFSD cuando se produce que  $r = 1$ .

Este factor resulta muy importante dado que el círculo unidad es un espacio de gran interés en el análisis del dominio transformado  $z$ , principalmente por su relación con la estabilidad de los sistemas, así como con las condiciones de existencia de la transformada de la señal  $x[n]$ .

## 1.2. Ecuaciones de cálculo de la TFSD

El dominio transformado es una herramienta de trabajo útil que nos permite modificar la representación de la señal a la forma más conveniente en cada caso. En determinadas ocasiones resulta de interés visualizar la señal en su forma temporal, pero en determinados casos puede ser más interesante o relevante realizarlo en su dominio frecuencial. Las diferentes transformadas que se han ido estudiando en las asignaturas Señales y sistemas tienen como objetivo proporcionar herramientas de trabajo para conmutar entre dominios cuando sea necesario y facilitar así las herramientas de análisis y diseño de los sistemas lineales.

Para que las transformadas tengan utilidad real es necesario que existan caminos para ir de un dominio a otro y viceversa, dado que de poca utilidad sería una transformada que solo permitiese la transformación en un sentido. La existencia de una transformada directa, así como de una transformada inversa, es necesaria para tener una transformación completa de utilidad.

### Ecuaciones de cálculo de la TFSD directa e inversa

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} \quad (4)$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \quad (5)$$



### 1.3. Condiciones de existencia de la TFSD

En el módulo de transformada  $z$  se pudo ver que la transformada de una señal ocurría dentro de lo que se llamó la ROC (siglas en inglés de *Region Of Convergence*). La extensión del plano  $z$  en el dominio complejo hace que en determinadas zonas para una señal o sistema concreto pueda existir la transformada y que en otras no se den las condiciones para su existencia. Al final, el círculo unidad, como se analizó en el módulo anterior, era una zona de especial interés en la aplicación de la transformada  $z$  sobre señales y sistemas estables.

En el caso de la TFSD, este hecho se ve simplificado, dado que se restringe el cálculo al círculo unidad y a partir de la ecuación se puede determinar que la existencia de la TFSD se producirá cuando la señal de entrada  $x[n]$  sea absolutamente sumable:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty \quad (6)$$

De esta forma, podemos afirmar que cualquier secuencia que sea absolutamente sumable tendrá TFSD, factor que incluye a todas las secuencias discretas de duración finita, así como a aquellas que sean absolutamente sumables de duración infinita.

En el campo del procesamiento de señal estamos habituados a trabajar con la función delta de Dirac. Esta función resulta de gran interés, puesto que permite evaluar las transformadas en condiciones límite de existencia, pero aporta la posibilidad de incluir en el estudio funciones que formalmente estarían en el límite de su existencia. El uso de esta función, como podremos comprobar más adelante, permitirá incluir en el cálculo algunas señales que no cumplen la condición anterior, pero que son de gran interés en el campo del análisis, como las señales periódicas.

## 2. TFSD de señales discretas típicas

El estudio teórico de sistemas requiere el uso de señales típicas para la caracterización de los mismos. La fundamentación teórica requiere de elementos matemáticos para la comprensión, análisis y diseño de sistemas discretos que puedan ser de utilidad en aplicaciones reales. La comprensión de la teoría requiere el conocimiento de algunos pares de transformadas fundamentales y en este apartado se analizarán algunas de las más interesantes. No se pretende que el estudiante se pierda en complejos cálculos matemáticos que no llevan a ningún lugar, sino más bien que consolide los conocimientos teóricos principales para la comprensión de la teoría. Hemos de pensar que en las aplicaciones reales no nos encontraremos con señales tipo como las que se presentarán en este apartado, sino más bien con señales discretas de diferente índole (señal de voz muestreada, valores bursátiles, temperatura diaria, velocidad de un motor, etc.) y que en este caso la valoración exacta de la transformada será imposible de forma teórica o analítica. Para ello se recurrirá a herramientas de cálculo numérico que se verán en el siguiente módulo y que explicarán cómo aplicar de forma práctica los fundamentos estudiados en este tema.

### 2.1. Señal delta discreta

La señal delta discreta corresponde a la señal más básica que nos podemos encontrar en el espacio discreto, puesto que se trata de una señal con valor 1 en un instante determinado de tiempo, mientras que vale cero para todos los demás.

La principal característica e interés de esta señal es que supone una base para la descomposición de cualquier señal como combinación lineal de deltas, de forma que, sea cual sea la señal de entrada  $x[n]$ , siempre la podremos descomponer de la siguiente forma:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k] \quad (7)$$

El conocimiento de las propiedades de la función delta discreta es de gran interés en el estudio de señales y sistemas.

Particularizando para el caso de una delta centrada en  $n = 0$  tenemos la siguiente ecuación para el cálculo de la TFSD:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] e^{-j\omega n} = 1 \quad (8)$$

De tal forma que una función delta discreta tiene como par transformada una función constante en frecuencia, es decir, la función delta discreta contiene todas las frecuencias por igual en el dominio transformado.

Para el caso de que la función delta esté desplazada en el tiempo la función transformada quedaría de la siguiente forma:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n - n_0] e^{-j\omega n} = e^{-j\omega n_0} \quad (9)$$

En este caso se observa que la transformada corresponde a una función de módulo constante, es decir, que la señal contiene todas las frecuencias por igual en módulo, pero con una fase lineal de pendiente  $-n_0$ .

## 2.2. Señal exponencial decreciente discreta orientada a la derecha

En este subapartado analizaremos una señal muy interesante en el estudio de señales discretas, la exponencial decreciente orientada a la derecha. Esta señal está definida de la siguiente forma:

$$x[n] = a^n u[n] \quad |a| < 1 \quad (10)$$

Se observa por la definición de la señal que, al tratarse de un valor de  $a$  con un módulo inferior a 1, será una función exponencial decreciente con origen en  $n = 0$  y que tenderá a cero en el infinito. Esto hace que sea una función absolutamente sumable y, por tanto, existirá la TFSD.

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (ae^{-j\omega})^n = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \quad (11)$$

## 2.3. Señal pulso rectangular centrado en el origen

El pulso rectangular es otra de las funciones de gran uso en las aplicaciones de procesamiento de señal. La función pulso rectangular viene definida por la siguiente expresión:

$$x[n] = \begin{cases} 1 & |n| \leq N \\ 0 & |n| > N \end{cases} \quad (12)$$

Esta señal corresponde a un pulso de  $2N + 1$  muestras centrado en el origen. Como se puede observar se trata de un pulso de duración finita y consecuentemente es absolutamente sumable. Para el cálculo de su transformada, sen-

cillamente se tendrán que aplicar las propiedades de suma de una serie geométrica y simplificar la expresión utilizando los operadores matemáticos convencionales.

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-N}^N e^{-j\omega n} = \frac{e^{j\omega N} - e^{-j\omega(N+1)}}{1 - e^{-j\omega}} = \frac{\text{sen}\left(\omega\left(N + \frac{1}{2}\right)\right)}{\text{sen}\frac{\omega}{2}} \quad (13)$$

## 2.4. Señal constante

Otra señal importante para el estudio de sistemas es la transformada de una señal constante definida según:

$$x[n] = 1 \quad (14)$$

En este caso, un razonamiento rápido muestra que, al no ser una función absolutamente sumable, la TFSD propiamente no existe. No obstante, en este caso se puede deducir la transformada de esta señal a partir del cálculo de la transformada inversa de una delta de Dirach en el espacio transformado.

En el apartado de las propiedades de la TFSD se verá que toda TFSD es  $2\pi$  periódica, un hecho fácilmente demostrable y que se verá en el apartado de propiedades. Partiendo de este hecho consideremos la función:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - 2\pi k) \quad (15)$$

Si procedemos al cálculo de la función de transferencia inversa aplicando la ecuación pertinente:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - 2\pi k) \right) e^{j\omega n} d\omega = 1 \quad (16)$$

En el intervalo de cálculo de la integral tan solo quedaría la delta situada en  $\omega = 0$ , lo que provoca que el resultado de la integral sea igual a la función constante para todo  $n$ . El valor de la TFSD en el origen será igual a la suma de todos los valores de la función. Puesto que en este caso la suma de todas las muestras de la señal de entrada sería infinito, la función delta representa ese cálculo al límite, un valor infinito únicamente para  $\omega = 0$  y cero para todos los demás.

No obstante, las propiedades de la función delta hacen que la integral de una función multiplicada por la delta sea el valor de la función en ese punto, y esto permite que podamos tener un cálculo útil aun estando en el límite de la existencia de la transformada.

A pesar de saber que estamos realizando un uso al límite de las propiedades matemáticas, estas son comúnmente utilizadas en el campo del procesamiento de señal, dado que permite trabajar con funciones de gran interés, como la función constante.

Esta reflexión nos permite definir la siguiente relación:

$$1 \xleftrightarrow{TFSD} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - 2\pi k) \quad (17)$$

## 2.5. Señal escalón unitario

La señal escalón unitario es también una de esas funciones utilizadas con frecuencia en el campo de la teoría de señal, así como en el caso de los sistemas de control digitales. Si imaginamos un motor que se encuentra en estado de reposo y lo activamos para que funcione a una determinada velocidad, estamos provocando una entrada al sistema en forma de escalón unitario y esta función será de gran utilidad para evaluar los parámetros de puesta en marcha del mismo.

La función escalón unitario está definida según:

$$u[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n \geq 0 \end{cases} \quad (18)$$

La TFSD de esta función se calcula aplicando la función de cálculo habitual:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-j\omega n} \quad (19)$$

Aquí podemos observar que aparece uno de los problemas mencionados anteriormente, que está relacionado con las propiedades de convergencia de la transformada en el límite. Estrictamente hablando, no se podría calcular la TFSD de dicha secuencia por no ser absolutamente sumable, ya que podemos comprobar que la suma de sus valores da infinito.

Para poder realizar el cálculo de la transformada se deberá recurrir al uso de algunas funciones, como es el caso de la delta de Dirac. Aunque la transformada se encontrará en el límite de la existencia matemática, su uso es funcional y permite utilizarla de forma teórica.

Si recordamos el caso de la exponencial decreciente, vemos que el escalón no es más que el límite de esta función cuando  $a = 1$ . Este caso, como hemos comentado, llevaría a la transformada al límite de la existencia y surge una irregularidad en  $\omega = 0$  que se puede resolver mediante dos expresiones

$$u[n] = 0.5 + 0.5\text{signo}[n] \quad \xleftrightarrow{TFSD} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi \delta(\omega - 2\pi k) + \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} \quad (20)$$

El escalón unitario  $u[n]$  se puede entender como una función de valor constante 0.5 sumada a la función  $\text{signo}[n]$ . Este truco se utiliza para resolver la anomalía que aparece en  $\omega = 0$ , de tal forma que la transformada se calcula como la transformada del valor medio de la función (0.5) más la transformada para el resto de frecuencias.

Como se ha dicho anteriormente, esta expresión se encuentra en el límite, y matemáticamente resulta irregular, pero a efectos de procesamiento de señal permite realizar los cálculos con esta función sin inducir a errores.

### 3. Propiedades de la TFSD

El tema de las propiedades de la TFSD es similar a las existentes en otros tipos de transformadas, como ocurre en la transformada analógica de Fourier, la transformada de Laplace o la transformada  $z$ .

El estudio de las propiedades tiene una doble función:

- 1) Comprender los conceptos teóricos relacionados con las modificaciones de características de las señales en el dominio de origen o en el transformado.
- 2) Disponer de herramientas que permitan facilitar el cálculo de transformadas complejas a partir del conocimiento de transformadas más simples con las que exista cierta relación basada en las propiedades.

Con estos dos objetivos en mente, abordaremos las principales propiedades de la TFSD sin entrar en gran detalle en las demostraciones matemáticas, más bien focalizando la comprensión de los aspectos relacionados con las modificaciones de las señales implicadas.

#### 3.1. Periodicidad de la TFSD

Esta propiedad ya ha sido comentada con anterioridad al inicio del módulo y es una propiedad inherente al hecho de que las exponenciales complejas discretas siempre tienen esta periodicidad  $2\pi$ .

$$\begin{aligned}
 X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} \\
 X(e^{j(\omega+2\pi)}) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j(\omega+2\pi)n} = e^{-j2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \\
 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} &= X(e^{j\omega})
 \end{aligned} \tag{21}$$

Se observa en la expresión que en el dominio discreto los valores de  $e^{j\omega n}$  se van repitiendo con una periodicidad  $2\pi$ , cosa que provoca que toda TFSD mostrará inevitablemente esa periodicidad.

#### 3.2. Linealidad de la TFSD

La linealidad de la TFSD es una de las principales propiedades de esta transformada y es la que hace que sea de tanta utilidad en el estudio de sistemas lineales. Esta propiedad nos viene a decir que si tenemos una señal compuesta por la combinación de dos señales:

$$\begin{array}{lcl}
x_1[n] & \xleftrightarrow{\text{TFSD}} & X_1(e^{j\omega}) \\
x_2[n] & \xleftrightarrow{\text{TFSD}} & X_2(e^{j\omega}) \\
ax_1[n] + bx_2[n] & \xleftrightarrow{\text{TFSD}} & aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega})
\end{array} \quad (22)$$

Esta propiedad de fácil demostración matemática resulta fácil de comprender. Si tenemos una primera señal que tiene una determinada distribución frecuencial  $X_1(e^{j\omega})$  y una segunda señal con una distribución frecuencial  $X_2(e^{j\omega})$ , ¿qué TFSD tendrá la suma de las dos señales? Resulta fácil pensar que la distribución frecuencial de la señal resultante para cada frecuencia no será más que la suma de las aportaciones a cada frecuencia que haga cada una de las señales; en otras palabras, la transformada resultante será la suma de transformadas. Este factor se puede extrapolar a cualquier combinación lineal entre las dos señales originales.

A efectos prácticos, esta propiedad puede ser de gran utilidad para el cálculo de transformadas de señales a partir de las combinaciones lineales de señales conocidas y, como se verá a lo largo del tema, se trata de una propiedad de gran utilidad.

### 3.3. Desplazamiento en el tiempo

La propiedad de desplazamiento en el tiempo nos permite comprender los cambios que se producen en el dominio transformado cuando la señal de origen se traslada en el tiempo:

$$\begin{array}{lcl}
x[n] & \xleftrightarrow{\text{TFSD}} & X(e^{j\omega}) \\
x[n - n_0] & \xleftrightarrow{\text{TFSD}} & e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})
\end{array} \quad (23)$$

Para comprender el sentido de esta propiedad debemos pensar qué ocurre en términos frecuenciales cuando se produce un desplazamiento temporal. La TFSD no es más que la descomposición de la señal original como suma de exponenciales complejas o, expresado en otros términos, como combinación de señales cosenoidales y senoidales. Cuando desplazamos temporalmente una función senoidal, la magnitud de esta función permanece intacta y lo que se produce es un cambio de fase, un cambio que será proporcional a la frecuencia. Cuanto mayor sea la frecuencia discreta, mayor desfase tendrá para cada una de las muestras.

Imaginemos dos señales senoidales, una con un periodo de 6 muestras y otra con un periodo de 12. Un desplazamiento de una muestra en la primera señal corresponderá a un desfase en grados de  $360/6$ . Si en 6 muestras recorro un ciclo de 360, en una muestra se producirá un desfase de 60 grados. En el caso de la segunda señal, un desplazamiento de una muestra será el equivalente a 30



grados. Esto justifica que, para el mismo desplazamiento temporal, el desfase en grados sea mayor cuanto mayor sea la frecuencia, y eso es justamente lo que indica el término  $e^{-j\omega n_0}$  de la ecuación (23).

La TFSD resultante a un desplazamiento temporal será exactamente la misma que la original, pero multiplicada por una exponencial compleja que modifica la fase según el retardo que se haya producido en la señal, mientras que el módulo resultante será exactamente el mismo que el de la señal original. Las frecuencias se mantienen intactas, pero cambian su fase debido al desplazamiento temporal.

### 3.4. Propiedad de modulación o desplazamiento en frecuencia

La propiedad de modulación es una de las propiedades de la transformada más importantes en el campo de los sistemas de comunicaciones. Por todos es conocido que si queremos llevar una determinada señal a otra zona del espectro, lo que se debe hacer es multiplicarla por una señal portadora. Esta multiplicación producirá un desplazamiento del espectro de la señal original exactamente a la frecuencia de la portadora y es ampliamente utilizado en la transmisión de señales. Cuando se tenga la necesidad de desplazar el espectro de una señal determinada se puede aplicar simplemente la propiedad de modulación o desplazamiento frecuencial:

$$\begin{aligned} x[n] &\xleftrightarrow{TFSD} X(e^{j\omega}) \\ e^{j\omega_0 n} x[n] &\xleftrightarrow{TFSD} X(e^{j(\omega-\omega_0)}) \end{aligned} \quad (24)$$

siendo  $\omega_0$  la pulsación de la portadora.

### 3.5. Diferenciación en el tiempo

Resulta evidente que la diferenciación en el tiempo no es un operador que se pueda aplicar, puesto que estamos en el dominio de señales discretas. No obstante, la aproximación numérica más sencilla de una derivada en el dominio discreto es:

$$\frac{x[n] - x[n-1]}{T} \quad (25)$$

Si se considera que el tiempo entre muestras es 1, podríamos decir que la diferencia entre dos muestras consecutivas sería una aproximación a la derivada y de ahí el nombre de esta propiedad para seguir el paralelismo con su homóloga en el dominio continuo:

$$x[n] - x[n-1] \xleftrightarrow{TFSD} (1 - e^{-j\omega})X(e^{j\omega}) \quad (26)$$

Propiedad que resulta fácilmente demostrable aplicando las propiedades de linealidad y de desplazamiento temporal. A nivel frecuencial se observa que la diferenciación temporal es equivalente a filtrar la señal con un filtro con respuesta frecuencial  $H(e^{j\omega}) = (1 - e^{-j\omega})$ .

La respuesta frecuencial de este filtro es de características pasa altos, dado que la función de transferencia para  $\omega = 0$  es 0, es decir, anula las bajas frecuencias y para  $\omega = \pi$  es 2, lo que quiere decir que amplifica las altas frecuencias. La derivada busca quedarse con aquellas características temporales que indican cambios abruptos de la señal, de forma que la respuesta del filtro ya es consecuente con este objetivo.

### 3.6. Acumulación en el tiempo

Esta propiedad cabría esperar que fuese la inversa de la anterior, puesto que la función de acumulación en el tiempo sería:

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^n x[m] \quad (27)$$

Esta expresión se puede expresar de forma recurrente como:

$$y[n] = x[n] + y[n-1] \quad (28)$$

Aplicando propiedades de linealidad cabría esperar que:

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) + e^{-j\omega} Y(e^{j\omega}) \quad (29)$$

De tal forma que:

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{X(e^{j\omega})}{1 - e^{-j\omega}} \quad (30)$$

Pero de la misma forma que ocurría anteriormente, esta expresión presenta una singularidad en  $\omega = 0$ , una singularidad que se debe resolver de la misma forma que en la transformada del escalón unitario. Consecuentemente, para la acumulación en el tiempo la propiedad resultante queda:

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{X(e^{j\omega})}{1 - e^{-j\omega}} + \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k) \quad (31)$$

Donde se observa que el primer factor de la propiedad sirve para la integración de todas las frecuencias excepto para  $\omega = 0$ , mientras que el segundo representa la integración de la componente continua de la señal representada por  $X(e^{j0})$ .

### 3.7. Inversión en el tiempo

En este caso concreto, la propiedad de la inversión en el tiempo relaciona la transformada de una señal cualquiera con su reflexión sobre el eje temporal, es decir, para una  $y[n] = x[-n]$ .

Para la demostración de esta propiedad haremos uso de la ecuación de cálculo de la TFSD para calcular la transformada de  $y[n]$ :

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[-n]e^{-j\omega n} \quad (32)$$

Realizando un cambio en el subíndice  $m = -n$  tenemos la siguiente expresión:

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[-m]e^{-j(-\omega)m} = X(e^{-j\omega}) \quad (33)$$

### 3.8. Expansión en el tiempo

Esta propiedad es muy útil en aquellos procesos en los que se modifica la frecuencia de muestreo de determinadas señales, como por ejemplo al submuestrear una señal de audio o al reescalar una imagen digital. En estos procedimientos se produce una alteración del contenido frecuencial de la señal y conviene conocer la relación de la nueva transformada con la de la señal original.

Esta propiedad difiere respecto de la equivalente analógica por la propia naturaleza de la señal discreta. En el caso de eliminar muestras, resulta obvio que la señal resultante perderá parte de la información y no tiene sentido relacionar las transformadas, ya que una parte de la información habrá desaparecido. En cambio, en algunas aplicaciones conviene expandir la información en el tiempo, como por ejemplo en un reescalado de una imagen. Imaginemos que tenemos una imagen determinada y que queremos aumentar su tamaño en un factor  $K$  para representarla en pantalla. Lo primero que tenemos que hacer en ese caso es generar una nueva señal que inserte  $k - 1$  ceros entre cada muestra de la señal original:

$$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[n/k] & \text{Si } n \text{ es un múltiplo de } K \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad (34)$$

Este operador generará una nueva secuencia discreta donde las muestras de la señal original estarán expandidas en un factor  $k$  e insertará  $k - 1$  ceros para generar la nueva secuencia expandida. Esta secuencia tiene toda la información de la señal original, así que resulta razonable pensar que existirá una relación entre sus transformadas.

Para el cálculo de la nueva transformada se procede de forma habitual:

$$X_{(k)}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_{(k)}[n]e^{-j\omega n} \quad (35)$$

Aplicando el cambio de índice  $n = rk$  obtenemos:

$$\begin{aligned} X_{(k)}(e^{j\omega}) &= \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x_{(k)}[rk]e^{-j\omega rk} = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[r]e^{-j(\omega k)r} \\ &= X(e^{jk\omega}) \end{aligned} \quad (36)$$

De forma que se puede concluir:

$$x_{(k)}[n] \xleftrightarrow{\text{TFSD}} X(e^{jk\omega}) \quad (37)$$

### 3.9. Diferenciación en frecuencia

Esta operación, más que tener una interpretación física, es más bien la consecuencia de la aplicación de un operador matemático simple como la diferenciación en frecuencia y que permite el cálculo de nuevas transformadas de forma sencilla:

$$\begin{aligned} x[n] &\xleftrightarrow{\text{TFSD}} X(e^{j\omega}) \\ nx[n] &\xleftrightarrow{\text{TFSD}} j \frac{\delta X(e^{j\omega})}{\delta \omega} \end{aligned} \quad (38)$$

Esta propiedad permite el cálculo de forma simple de la TFSD de una pendiente a partir de la TFSD de un escalón unitario. Aplicando recursivamente esta propiedad se pueden conocer las transformadas de funciones polinómicas.

La demostración de la propiedad se puede realizar de forma sencilla a partir de la ecuación de cálculo de la transformada aplicando la propiedad de derivación:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} \quad (39)$$

$$\frac{\delta X(e^{j\omega})}{\delta \omega} = \frac{\delta \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} \right)}{\delta \omega} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \frac{\delta e^{-j\omega n}}{\delta \omega} \quad (40)$$

$$\frac{\delta X(e^{j\omega})}{\delta \omega} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} -jnx[n]e^{-j\omega n} \quad (41)$$

Y dividiendo por  $-j$  en ambos términos de la igualdad se obtiene finalmente la propiedad demostrada.

### 3.10. El teorema de Parseval

El teorema de Parseval es otro teorema de gran aplicación en el campo del procesamiento de la señal. En determinados casos resulta necesario calcular algunos parámetros físicos relacionados con una determinada señal, como por ejemplo la energía de la misma.

La definición de la energía de una señal discreta viene definida por la siguiente expresión:

$$E[x[n]] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 \quad (42)$$

El teorema de Parseval determina que la energía de una señal se puede calcular bien desde el dominio temporal bien en el dominio transformado mediante la siguiente relación de igualdad:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (43)$$

### 3.11. La propiedad de la convolución

Si bien todas las propiedades son interesantes en el estudio de la teoría de señales y sistemas, la propiedad de la convolución es posiblemente la más importante por su trascendencia en las aplicaciones de procesamiento de señal. La convolución es una operación clave en el tratamiento de sistemas lineales, de ahí que el conocimiento de las propiedades de este operador es de gran utilidad.

Considerando la definición de convolución entre dos señales:

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m] \quad (44)$$

La TFSD de la señal  $y[n]$  se puede expresar en función de las transformadas de  $x[n]$  y  $h[n]$  de la siguiente forma:

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m] \right) e^{-j\omega n} \quad (45)$$

Permutando el orden de los sumatorios aplicando propiedad conmutativa:

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n-m] e^{-j\omega n} \quad (46)$$

Aplicando las propiedades de la TFSD se observa que el segundo término de la expresión corresponde a un desplazamiento temporal de  $h[n]$  que tendrá como transformada  $e^{-j\omega m} H(e^{j\omega})$  y al reordenar nuevamente los términos del sumatorio:

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] e^{-j\omega m} H(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] e^{-j\omega m} = X(e^{j\omega}) H(e^{j\omega}) \quad (47)$$

Con lo que se concluye que la TFSD de la convolución de dos secuencias tiene como transformada el producto de las TFSD de cada secuencia. La convolución en el dominio temporal se traduce en productos en el dominio transformado, una propiedad ampliamente conocida en el ámbito de procesamiento de señal.

### 3.12. Multiplicación en el tiempo

La dualidad de las transformadas hace que las propiedades en un dominio tengan la consecuente dual en el dominio transformado. En el subapartado anterior se ha demostrado que la convolución en el tiempo se traduce en una multiplicación en frecuencia. En este caso veremos qué ocurre cuando lo que se realiza es una multiplicación temporal de dos secuencias para determinar qué efecto se produce en el dominio frecuencial.

Consideremos una secuencia  $y[n] = x_1[n] x_2[n]$  y procedamos al cálculo de la TFSD de dicha secuencia:

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1[n] x_2[n] e^{-j\omega n} \quad (48)$$

considerando que  $x_1[n] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X_1(e^{j\theta}) e^{j\theta n} d\theta$ ,

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X_1(e^{j\theta}) e^{j\theta n} d\theta \right) x_2[n] e^{-j\omega n} \quad (49)$$

y aplicando nuevamente la propiedad conmutativa del producto respecto de la suma:

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X_1(e^{j\theta}) \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2[n] e^{-j(\omega-\theta)n} \right) d\theta \quad (50)$$

donde vemos que el término del sumatorio corresponde a una propiedad de modulación quedando la ecuación de la siguiente forma:

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X_1(e^{j\theta}) X_1(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \quad (51)$$

lo que corresponde a una convolución periódica sobre cualquier intervalo de longitud  $2\pi$ .

### 3.13. Propiedades de simetría de la TFSD

En este subapartado se estudiarán las principales propiedades de simetría de la TFSD para el caso de señales reales, dado que en las aplicaciones que trataremos en esta asignatura se considerará que las señales implicadas son señales reales prácticamente en su totalidad. La característica de la TFSD en su expresión matemática es la que determina las propiedades de simetría existentes, así como la demostración de las mismas.

A continuación, se presenta una tabla con las principales propiedades de simetría de la TFSD para señales reales.

Simetría conjugada para señales reales	$x[n]$ es real y par	$\begin{cases} X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega}) \\ \operatorname{Re}\{X(e^{j\omega})\} = \operatorname{Re}\{X(e^{-j\omega})\} \\ \operatorname{Im}\{X(e^{j\omega})\} = -\operatorname{Im}\{X(e^{-j\omega})\} \\  X(e^{j\omega})  =  X(e^{-j\omega})  \\ \angle X(e^{j\omega}) = -\angle X(e^{-j\omega}) \end{cases}$
Simetría para señales par reales	$x[n]$ real y par	$X(e^{j\omega})$ real y par
Simetría para señales impar reales	$x[n]$ real e impar	$X(e^{j\omega})$ puramente imaginaria e impar

Cuando se trata de señales reales, la TFSD es la proyección sobre una parte real en forma de coseno y sobre una imaginaria en forma de seno, ya que  $e^{j\omega} = \cos(\omega) + j\sin(\omega)$ . Si la señal de entrada es real y par, únicamente tendrá componente sobre la parte real de la transformada (el coseno es una señal par). En el caso de que la señal de entrada sea impar, únicamente tendrá proyección sobre la parte imaginaria (el seno es impar). Con este razonamiento y aplicando las propiedades se pueden ir obteniendo las diferentes relaciones de simetría presentadas anteriormente.

## 4. La serie discreta de Fourier (SDF)

En este apartado se presentará la descomposición en serie de Fourier para una señal discreta. Es bien conocido que las señales periódicas se pueden descomponer como combinación lineal de señales periódicas exponenciales complejas, siendo este uno de los principios fundamentales de la teoría de Fourier.

En este apartado se centrará el estudio en las señales periódicas discretas, considerándose estas como aquellas que cumplen

$$x[n] = x[n + rN] \quad (52)$$

siendo  $N$  el periodo fundamental y  $r$  cualquier valor entero.

El primer aspecto diferencial de las series periódicas discretas respecto de las continuas es que para una señal discreta el número de exponenciales complejas que tienen una periodicidad de  $N$  muestras es finito

$$e^{j\frac{k2\pi}{N}n} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (53)$$

Esta es una de las principales diferencias respecto a las series continuas de Fourier, donde el número de armónicos se extendía hasta infinito.

Este hecho provocará que para una señal periódica de 10 muestras, la descomposición en series discretas de Fourier tendrá un total de 10 coeficientes y para una de cinco muestras serán tan solo 5 coeficientes.

### 4.1. Los coeficientes de la SDF (serie discreta de Fourier)

La descomposición en SDF requiere del uso de una ecuación de cálculo para obtener cada uno de los coeficientes de la descomposición. En el caso de las series discretas, las ecuaciones de cálculo son las siguientes:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{jk(2\pi/N)n} \quad (54)$$

donde:

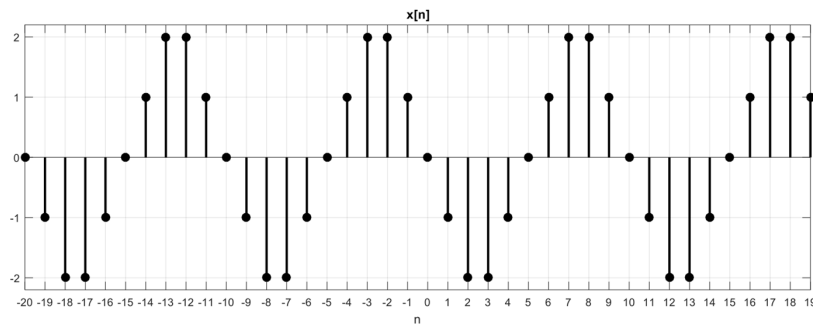
$$\tilde{X}[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n} \quad (55)$$



siendo la primera de ellas la ecuación de síntesis, que indica cómo podemos generar la secuencia  $x[n]$  como suma  $N$  señales armónicas de periodicidad  $N$ . La segunda ecuación corresponde a la ecuación de análisis que indica cómo podemos obtener el valor de cada uno de los coeficientes de la señal a partir de las muestras de un periodo básico.

### Ejemplo 1

Dada la siguiente señal de tiempo discreto:



a) ¿Cuál es su periodo?

Observamos que se repiten los valores cada 10 muestras. La señal es periódica de periodo 10.

b) ¿Cuál es su pulsación fundamental?

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5} \text{ rad/s}$$

c) ¿Cuántos coeficientes del desarrollo en series de Fourier pueden ser diferentes?

En el caso discreto hay tantos coeficientes distintos como muestras tiene un periodo de la secuencia. Por tanto, hay 10 diferentes.

d) ¿Sus coeficientes serán reales, imaginarios puros o imaginarios? ¿Por qué?

Los coeficientes son imaginarios puros debido a que la señal tiene simetría impar.

e) Sin resolver la serie de Fourier, ¿cuál es el valor de  $a_0$ ?

Como la señal presenta simetría impar, podemos decir que  $a_0$  ha de ser 0. Si lo calculamos veremos que es así.

$$a_0 = \frac{\sum_{n=0}^9 x[n]}{10} = 0$$

f) Obtén los coeficientes del desarrollo en series de Fourier, coeficientes  $a_k$ .

Aplicamos la ecuación:

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

En nuestro caso,

$$a_k = \frac{1}{10} \sum_{n=-5}^4 x[n] e^{-j\frac{\pi}{5}kn} = \frac{1}{10} (e^{-j\frac{\pi}{5}k(-4)} + 2e^{-j\frac{\pi}{5}k(-3)} + 2e^{-j\frac{\pi}{5}k(-2)} + e^{-j\frac{\pi}{5}k(-1)} - e^{-j\frac{\pi}{5}k(1)} - 2e^{-j\frac{\pi}{5}k(2)} - 2e^{-j\frac{\pi}{5}k(3)} - e^{-j\frac{\pi}{5}k(4)})$$

$$a_k = \frac{1}{10} \left( e^{j\frac{4\pi}{5}k} + 2e^{j\frac{3\pi}{5}k} + 2e^{j\frac{2\pi}{5}k} + e^{j\frac{\pi}{5}k} - e^{-j\frac{\pi}{5}k} - 2e^{-j\frac{2\pi}{5}k} - 2e^{-j\frac{3\pi}{5}k} - e^{-j\frac{4\pi}{5}k} \right)$$

agrupando:

$$a_k = \frac{1}{10} \left( e^{j\frac{4\pi}{5}k} - e^{-j\frac{4\pi}{5}k} + 2e^{j\frac{3\pi}{5}k} - 2e^{-j\frac{3\pi}{5}k} + 2e^{j\frac{2\pi}{5}k} - 2e^{-j\frac{2\pi}{5}k} + e^{j\frac{\pi}{5}k} - e^{-j\frac{\pi}{5}k} \right)$$

con lo que,

$$a_k = \frac{1}{10} \left( 2j\operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{5}k\right) + 4j\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{5}k\right) + 4j\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{5}k\right) + 2j\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{5}k\right) \right)$$

$$a_k = j\frac{1}{5} \left( \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{5}k\right) + 2\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{5}k\right) + 2\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{5}k\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{5}k\right) \right)$$

Donde vemos claramente que los coeficientes son imaginarios puros.

g) A partir del resultado obtenido, ¿cuáles serían los coeficientes para la señal  $x[n-3]$ ?

$$b_k = a_k \cdot e^{-j\frac{\pi}{5}k(3)} = a_k \cdot e^{-j\frac{3\pi}{5}k}$$

h) Obtén los coeficientes de la señal  $x[n] - x[n-1]$  a partir de los coeficientes  $a_k$ .

$$b_k = a_k - a_k e^{-j\frac{\pi k}{5}} = a_k \left( 1 - e^{-j\frac{\pi k}{5}} \right)$$

A continuación, responde a las siguientes cuestiones y justifica la respuesta.

i) ¿Cuál es el valor del coeficiente  $a_1$ ?

$$a_1 = j\frac{1}{5} \left( \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{5}\right) + 2\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{5}\right) + 2\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right) \right)$$

Al evaluar  $a_1 = 0.9960j$

j) ¿Cuál es el valor del coeficiente  $a_{59}$ ?

Como es periódica de periodo 10, tenemos que  $a_{59} = a_{10 \cdot 5 + 9} = a_9$ .

$$a_9 = j\frac{1}{5} \left( \operatorname{sen}\left(\frac{36\pi}{5}\right) + 2\operatorname{sen}\left(\frac{27\pi}{5}\right) + 2\operatorname{sen}\left(\frac{18\pi}{5}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{9\pi}{5}\right) \right)$$

$a_9 = -0.9960j$

k) ¿Cuál es el valor del coeficiente  $a_{24}$ ?

Como es periódica de periodo 10, tenemos que  $a_{24} = a_{10 \cdot 2 + 4} = a_4$ .

$$a_4 = j\frac{1}{5} \left( \operatorname{sen}\left(\frac{16\pi}{5}\right) + 2\operatorname{sen}\left(\frac{12\pi}{5}\right) + 2\operatorname{sen}\left(\frac{8\pi}{5}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{5}\right) \right)$$

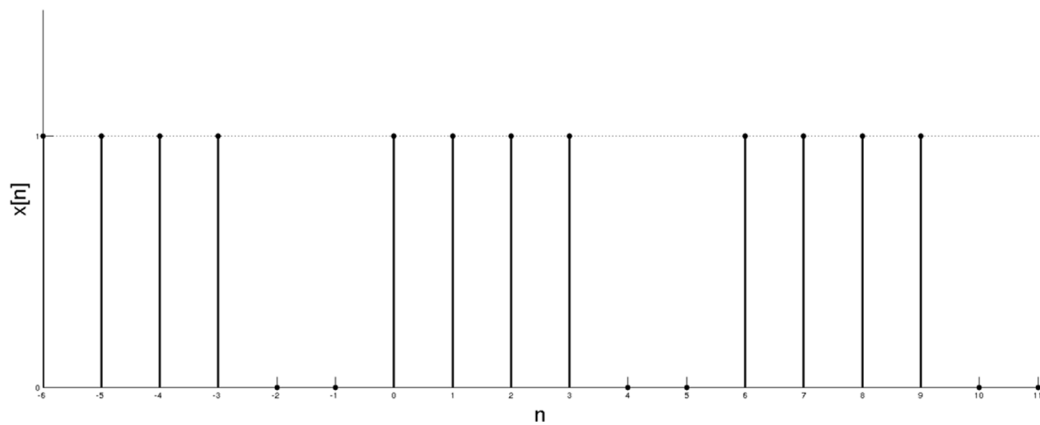
$a_4 = 0$

l) ¿Cuál es el valor del coeficiente  $a_{40}$ ?

$a_{40} = 0$ , al ser equivalente a  $a_0$ .

## Ejemplo 2

Dada la siguiente señal de tiempo discreto:



a) ¿Cuál es su periodo?

Observando la gráfica vemos que es periódica de periodo  $N = 6$ .

b) ¿Cuál es su pulsación fundamental?

La pulsación fundamental vendrá dada por:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \text{ rad/s}$$

c) ¿Cuántos coeficientes del desarrollo en series de Fourier pueden ser diferentes?

Sabemos que, en el caso de señales discretas periódicas, los coeficientes del desarrollo en series de Fourier también son periódicos. Además, el periodo es el mismo que tiene la señal en el dominio del tiempo. En consecuencia, hay 6 coeficientes diferentes.

d) ¿Sus coeficientes serán reales, imaginarios puros o imaginarios? ¿Por qué?

Son imaginarios, es decir, tendrán una parte real y una parte imaginaria. Lo sabemos porque la señal no presenta ninguna simetría (no es par, ni impar).

e) Sin resolver la serie de Fourier, ¿cuál es el valor de  $a_0$ ?

El valor de  $a_0$ , al igual que en el caso de tiempo continuo, representa el valor medio. En este caso será un valor positivo, ya que solo tenemos muestras positivas. Para evaluarlo sumamos las muestras en un periodo y lo dividimos por el periodo. Sumemos por ejemplo las muestras entre  $n = 0$  y  $n = 5$ .

$$a_0 = \frac{1+1+1+1+0+0}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

f) Obtén los coeficientes del desarrollo en series de Fourier, coeficientes  $a_k$ .

Evaluamos la expresión general:

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\omega_0 n}$$

En nuestro caso,

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{6} \sum_{n=0}^5 x[n] e^{-jk\frac{\pi}{3}n} = \frac{1}{6} (1 + 1 \cdot e^{-jk\frac{\pi}{3}} + 1 \cdot e^{-jk\frac{2\pi}{3}} + 1 \cdot e^{-jk\pi} + 1 \cdot e^{-jk\frac{4\pi}{3}} + 0 + 0) = \\ &= \frac{1}{6} (1 + e^{-jk\frac{\pi}{3}} + e^{-jk\frac{2\pi}{3}} + e^{-jk\pi}) \end{aligned}$$

Evaluamos los 6 coeficientes diferentes:

$$a_0 = \frac{1}{6}(1 + e^0 + e^0 + e^0) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \text{ (tal como ya habíamos calculado)}$$

$$a_1 = \frac{1}{6}(1 + e^{-j\frac{\pi}{3}} + e^{-j\frac{2\pi}{3}} + e^{-j\pi}) = \frac{1}{6}(1 + \cos(\frac{\pi}{3}) - j\sin(\frac{\pi}{3}) + \cos(\frac{2\pi}{3}) - j\sin(\frac{2\pi}{3}) - 1) = \frac{1}{6}(1 + \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} - 1) = -j\frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$a_2 = \frac{1}{6}(1 + e^{-j\frac{2\pi}{3}} + e^{-j\frac{4\pi}{3}} + e^{-j2\pi}) = \frac{1}{6}(1 + \cos(\frac{2\pi}{3}) - j\sin(\frac{2\pi}{3}) + \cos(\frac{4\pi}{3}) - j\sin(\frac{4\pi}{3}) + 1) = \frac{1}{6}(1 - \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} + 1) = \frac{1}{6}$$

$$a_3 = \frac{1}{6}(1 + e^{-j\frac{3\pi}{3}} + e^{-j\frac{6\pi}{3}} + e^{-j3\pi}) = \frac{1}{6}(1 - 1 + 1 - 1) = 0$$

$$a_4 = \frac{1}{6}(1 + e^{-j\frac{4\pi}{3}} + e^{-j\frac{8\pi}{3}} + e^{-j4\pi}) = \frac{1}{6}(1 - \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} + 1) = \frac{1}{6}$$

$$a_5 = \frac{1}{6}(1 + e^{-j\frac{5\pi}{3}} + e^{-j\frac{10\pi}{3}} + e^{-j5\pi}) = \frac{1}{6}(1 + \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} - 1) = j\frac{\sqrt{3}}{6}$$

Se observan valores reales e imaginarios puros, es decir, son imaginarios tal como hemos comentado en la *d* (no son todos reales o todos imaginarios puros) lo que pasa es que da la casualidad de que la parte real es cero cuando la imaginaria no lo es o viceversa.

g) A partir del resultado obtenido, ¿cuáles serían los coeficientes para la señal  $x[n-4]$ ?

Tal y como indica la propiedad del desplazamiento, los coeficientes serán:

$$b_k = a_k e^{-jk\frac{\pi}{3}4}$$

h) ¿Podemos obtener los coeficientes de la señal  $x[2n]$  a partir de los coeficientes  $a_k$ ? ¿Por qué? ¿Y de por ejemplo  $x[\frac{n}{2}]$ ? ¿Por qué?

En el caso discreto comprimir en el tiempo equivale a perder muestras, por lo tanto, la señal puede no tener nada que ver con la original. Es por ello que no podemos obtener los coeficientes de  $x[2n]$  a partir de los coeficientes  $x[n]$ .

Por el contrario, expandir una señal en el tiempo consiste en intercalar ceros, pero las muestras que hay en la señal original lo están en la versión expandida. El periodo cambia al doble (en general  $aN$ ). Los coeficientes serán  $\frac{a_k}{2}$  y habrá 12 diferentes.

i) Obtén los coeficientes de la señal  $x[\frac{n}{2}]$  que puedas del apartado *h* a partir de los coeficientes  $a_k$ . Solo lo podemos hacer de  $x[\frac{n}{2}]$ .

Aplicando la propiedad de expansión en el tiempo:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{3}, & a_1 &= -j\frac{\sqrt{3}}{6}, & a_2 &= \frac{1}{12}, & a_3 &= 0, & a_4 &= \frac{1}{12}, & a_5 &= j\frac{\sqrt{3}}{12} \\ a_6 &= \frac{1}{3}, & a_7 &= -j\frac{\sqrt{3}}{6}, & a_8 &= \frac{1}{12}, & a_9 &= 0, & a_{10} &= \frac{1}{12}, & a_{11} &= j\frac{\sqrt{3}}{12} \end{aligned}$$

Observamos que a partir del 6 se vuelven a repetir (a pasar son 12 diferentes, en realidad son 6 diferentes).

A continuación, responde a las siguientes cuestiones y justifica la respuesta (Para la señal periódica de periodo 6).

j) ¿Cuál es el valor del coeficiente  $a_{-1}$ ?

$$a_{-1} = a_{-1+6} = a_5 = j\frac{\sqrt{3}}{6}$$

k) ¿Cuál es el valor del coeficiente  $a_{59}$ ?

$$a_{59} = a_{5+6 \cdot 9} = a_5 = j\frac{\sqrt{3}}{6}$$

l) ¿Cuál es el valor del coeficiente  $a_{24}$ ?

$$a_{24} = a_{0+6 \cdot 4} = a_0 = \frac{2}{3}$$

m) ¿Cuál es el valor del coeficiente  $a_{40}$ ?

$$a_{40} = a_{4+6 \cdot 6} = a_4 = \frac{1}{6}$$

## 4.2. Propiedades de las SDF

Las SDF de forma similar a la TFSD presentan una serie de propiedades que conviene conocer a fin de poder utilizarlas en la interpretación teórica o en el cálculo de coeficientes de las mismas de forma similar a las que se presentaron en el caso de la TFSD.

No obstante, existen algunas características particulares propias de la naturaleza de las señales implicadas. Para que una propiedad pueda considerarse en el caso de la SDF es necesario que, tras aplicar la propiedad, el resultado sea una nueva secuencia con la misma periodicidad que la secuencia de origen, cosa que limita el uso de algunas propiedades.

Dada la similitud entre estas propiedades con las expuestas en el apartado previo de la TFSD no se expondrán de forma particularizada, sino que sencillamente se presentará la tabla de propiedades dejando para el estudio complementario la demostración de las mismas.

Propiedad	Señales implicadas	DFS
	Sean $x[n]$ , $y[n]$ dos secuencias periódicas de periodicidad $N$	Sean $\tilde{X}[k]$ , $\tilde{Y}[k]$ los coeficientes en desarrollo de la serie discreta de Fourier
Linealidad	$Ax[n] + B y[n]$	$A\tilde{X}[k] + B\tilde{Y}[k]$
Desplazamiento en el tiempo	$x[n - n_0]$	$e^{-jk(2\pi/N)n_0}\tilde{X}[k]$
Modulación o desplazamiento en frecuencia	$e^{jM(2\pi/N)n}x[n]$	$\tilde{X}[k - M]$
Convolución periódica	$\sum_{r=0}^{N-1} x[r] y[k - r]$	$N\tilde{X}[k]\tilde{Y}[k]$
Multiplicación	$x[n] \cdot y[n]$	$\sum_{r=0}^{N-1} \tilde{X}[r] \cdot \tilde{Y}[k - r]$
Diferenciación en el tiempo	$x[n] - x[n - 1]$	$(1 - e^{-jk(2\pi/N)})\tilde{X}[k]$

Propiedad	Señales implicadas	DFS
Teorema de Parseval	$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1}  x[n] ^2$	$\sum_{k=0}^{N-1}  \tilde{X}[k] ^2$

Existen otras propiedades que completan las anteriores, pero se pueden demostrar fácilmente a partir de las vistas para el caso de la TFSD o a partir de las ecuaciones de cálculo de la SDF, por lo que no se considera necesario extenderse en este aspecto. Las propiedades comparten elementos conceptuales entre ellas y resulta repetitivo reincidir en las demostraciones de cada una de ellas.

## 5. La TFSD de señales periódicas discretas

El cálculo de la TFSD de una señal periódica puede ser de interés para completar la extensión del campo de aplicación de la TFSD sobre este tipo de señales. Tal y como se estudió en el subapartado 1.3, la existencia de la TFSD requiere unas condiciones concretas para su existencia, como el hecho de que la serie

de entrada sea absolutamente sumable  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$ .

Estrictamente hablando, las señales periódicas no cumplen esta condición de existencia, con lo que no se podría realizar el cálculo de la TFSD. No obstante, en el cálculo de algunas señales concretas, como la señal constante, se ha observado que llevando al límite los operadores matemáticos se ha conseguido realizar el cálculo de las TFSD de algunas señales interesantes como la señal constante, que tal como se analizó en el subapartado 2.4 llevó a la obtención del siguiente par transformado:

$$1 \xleftrightarrow{\text{TFSD}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - 2\pi k) \quad (83)$$

Sobre dicha ecuación, y aplicando la propiedad de modulación con una exponencial periódica del tipo  $e^{jk(2\pi/N)n}$ , se puede obtener la siguiente transformada:

$$e^{jk(2\pi/N)n} \xleftrightarrow{\text{TFSD}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - k(2\pi/N) - 2\pi k) \quad (84)$$

Finalmente, teniendo en cuenta que toda secuencia periódica de periodo  $N$  admite un desarrollo en DFS del tipo:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{jk(2\pi/N)n} \quad (85)$$

y aplicando convenientemente la propiedad de linealidad se puede llegar a la siguiente expresión:

$$\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{jk(2\pi/N)n} \xleftrightarrow{\text{TFSD}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \tilde{X}[k] \delta(\omega - k(2\pi/N)) \quad (86)$$

Ecuación que demuestra que la TFSD de una señal periódica se puede obtener directamente a partir de los coeficientes de su SDF.

### Ejemplo 3

Considérese la siguiente señal periódica discreta:

$$x[n] = \cos(\omega_0 n) = \frac{1}{2} e^{j\omega_0 n} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 n}$$

Aplicando directamente la propiedad de modulación o desplazamiento frecuencial para la señal previa se obtiene:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi k)$$

Lo que se traduce en:

$$X(e^{j\omega}) = \pi \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k) + \pi \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi k) \quad -\pi \leq \omega \leq \pi$$

Teniendo en cuenta que cualquier señal periódica discreta será un sumatorio de exponenciales complejas, será fácil determinar la TFSD de cualquier señal periódica a partir del resultado del ejemplo anterior.



## 6. Caracterización de sistemas LIT digitales mediante la TFSD

La teoría desarrollada tiene como objetivo su aplicación práctica sobre el análisis y diseño de sistemas digitales. Como es bien conocido, en esta asignatura se restringe el estudio a aquellos sistemas que poseen dos propiedades específicas, como son la linealidad y la invariancia temporal.

Estos sistemas ya han sido estudiados en el módulo de transformada  $z$  y, de hecho, las diferentes transformadas lo que permiten es particularizar este estudio para determinadas casuísticas, así como para su implementación en dispositivos de cálculo digital. El hecho de utilizar una transformada u otra dependerá del objetivo que se busque en cada caso. La transformada  $z$  es de gran utilidad en el diseño de filtros digitales, mientras que en casos de análisis frecuencial suele ser más común el uso de la TFSD.

En este apartado se seguirá un recorrido parecido al que se hizo en el módulo de transformada  $z$  para la caracterización de sistemas LIT, pero focalizando el estudio en la TFSD y sus propiedades y relacionando los conceptos con los que han visto previamente para el caso de la transformada  $z$ .

### 6.1. Función de transferencia de un sistema LIT digital

Sean  $S$  un sistema LIT digital,  $x[n]$  su señal de entrada,  $y[n]$  su señal de salida y  $h[n]$  su respuesta impulsional. Como sabemos, estas tres señales están relacionadas entre sí a través de la operación convolución:

$$y[n] = x[n] * h[n] \quad (89)$$

Aplicando las propiedades de la TFSD, tal y como se vio en el subapartado 3.11, se puede obtener la siguiente relación:

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) \quad (90)$$

siendo  $X(e^{j\omega})$ ,  $Y(e^{j\omega})$ ,  $H(e^{j\omega})$  las TFSDs de, respectivamente,  $x[n]$ ,  $y[n]$  y  $h[n]$ .

Este razonamiento lleva a la definición de  $H(e^{j\omega})$  como la función de transferencia del sistema LIT.

La observación de la ecuación nos permite ver que el sistema LIT ejerce una transformación de las componentes frecuenciales de la señal de entrada alterándolas en módulo y fase, de forma que será conveniente conocer la representación de la función de transferencia en módulo y fase a fin de comprender el efecto sobre las frecuencias de la señal de entrada.

El efecto del sistema en términos de estas dos magnitudes nos lleva a las siguientes ecuaciones de relación:

$$|Y(e^{j\omega})| = |X(e^{j\omega})| |H(e^{j\omega})| \quad (91)$$

$$\angle Y(e^{j\omega}) = \angle X(e^{j\omega}) + \angle H(e^{j\omega}) \quad (92)$$

La primera ecuación muestra que las componentes frecuenciales de la señal de entrada se verán amplificadas o atenuadas en módulo según el módulo de la función de transferencia para cada frecuencia, mientras que la fase resultante para cada valor  $\omega$  será la suma de las fases. Este hecho es de gran importancia en la comprensión de los efectos de un sistema  $S$  sobre la señal de entrada, pudiéndose explicar la transformación que produce en base a estos dos parámetros. Esto hace que la representación de los sistemas en módulo y fase sea mucho más utilizada que en parte real o imaginaria, dado que tiene una interpretación física clara sobre el efecto que produce sobre la señal, que será justamente lo que se verá en el subapartado 6.2.

## 6.2. Representación en módulo y fase de la TFSD

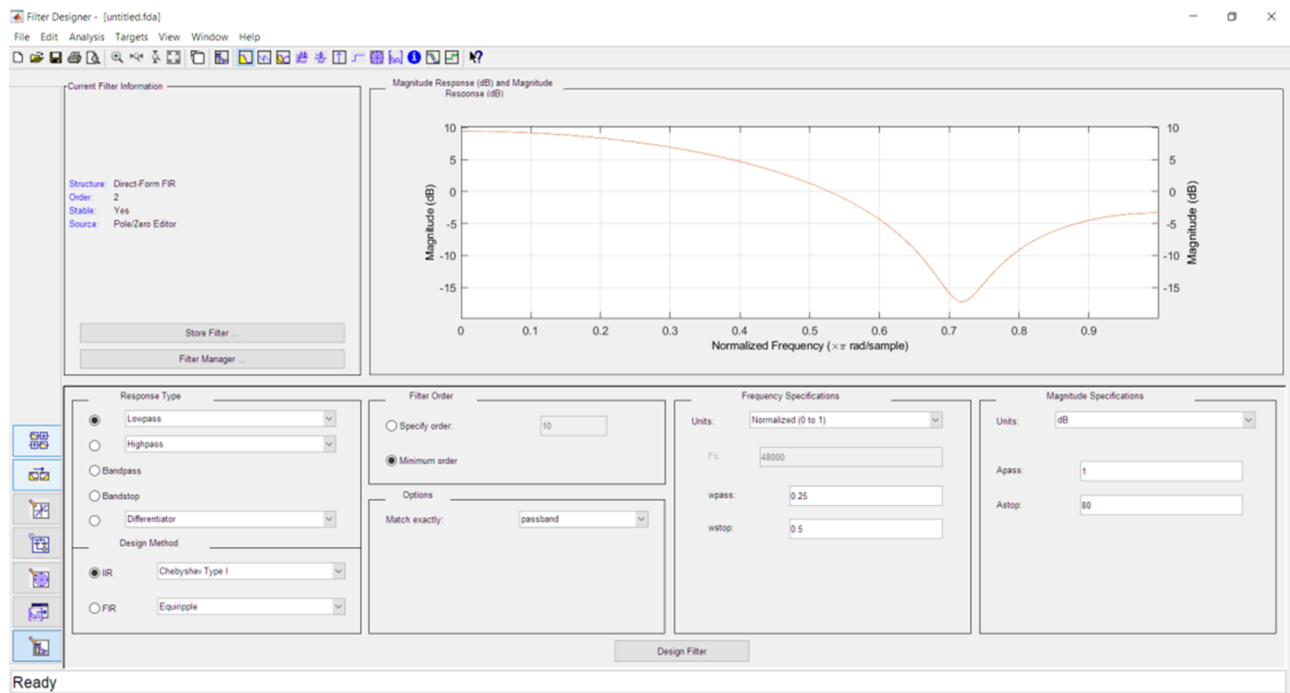
Para poder conocer los efectos de un sistema LIT sobre una determinada señal conviene conocer la representación en módulo y fase del sistema, puesto que esto nos permitirá ver la amplificación o atenuación sobre cada una de las frecuencias, así como el desfase que producirá sobre la señal de entrada.

Para el análisis de módulo y fase trabajaremos con la aplicación MATLAB FilterDesigner, una potente interfaz gráfica que permite el diseño y análisis de filtros.

Para poder trabajar con frecuencias normalizadas y tener una representación de la TFSD se tendrán que modificar algunas características del módulo.

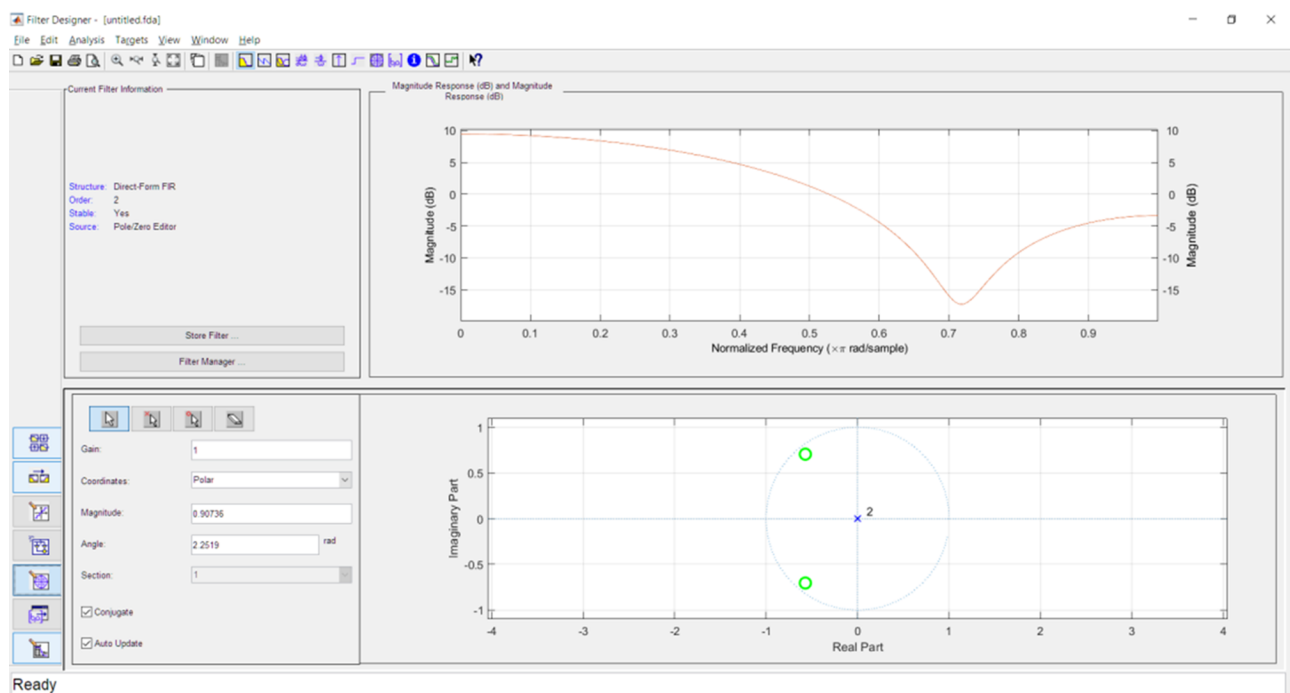
Tal y como se observa en la figura 1, en «Frequency Specifications» se ha seleccionado la opción «Normalized». Esto permitirá poder visualizar el eje frecuencial normalizado entre  $[0..1]$  o entre  $[0..\pi]$ .

Figura 1. Normalización de la frecuencia



Dado que el diseño de filtros no es uno de los objetivos de estudio, pasaremos a configurar la aplicación para poder visualizar las representaciones utilizando el «Pole/Zero Editor» tal y como se muestra en la figura 2.

Figura 2. Activación del análisis de polos y ceros



En el margen inferior izquierdo se observa que se ha activado una visualización que permite trabajar directamente con la información de polos y ceros, cosa que facilitará el análisis de sistemas diseñados a partir de su transformada  $z$  o directamente en el dominio de la TFSD.

### 6.2.1. El módulo de la función de transferencia

Consideremos una función de transferencia de un sistema discreto caracterizada de la siguiente forma:

$$H(e^{j\omega}) = G \frac{\prod_{k=1}^K (e^{j\omega} - c_k)}{\prod_{l=1}^L (e^{j\omega} - p_l)} \quad (93)$$

como un sistema con  $K$  ceros,  $L$  polos y una ganancia  $G$ . Aplicando las propiedades matemáticas del módulo de la expresión anterior se obtiene:

$$|H(e^{j\omega})| = |G| \frac{\prod_{k=1}^K |e^{j\omega} - c_k|}{\prod_{l=1}^L |e^{j\omega} - p_l|} \quad (94)$$

De tal forma que el módulo de la expresión para una  $\omega$  determinada será el producto de módulos de los vectores  $(e^{j\omega} - c_k)$  dividido entre el producto de módulos de los vectores  $(e^{j\omega} - p_l)$ . Esto quiere decir que para calcular la ganancia del filtro tendremos que recorrer el círculo unidad para los diferentes valores de  $\omega$  e ir realizando la operación matemática previa. Evidentemente, para la evaluación de sistemas complejos se recurre al uso de software de análisis, como puede ser el MATLAB, pero lo interesante de esta deducción es que cuando nos acercamos al área de influencia de un cero la ganancia del sistema baja, y cuando nos acercamos a la zona de influencia de un polo la ganancia del sistema sube, al estar el producto en el denominador. Esto permitirá realizar una aproximación a la ganancia del sistema tan solo a partir de la visualización del diagrama de polos y ceros como veremos en los siguientes ejemplos.

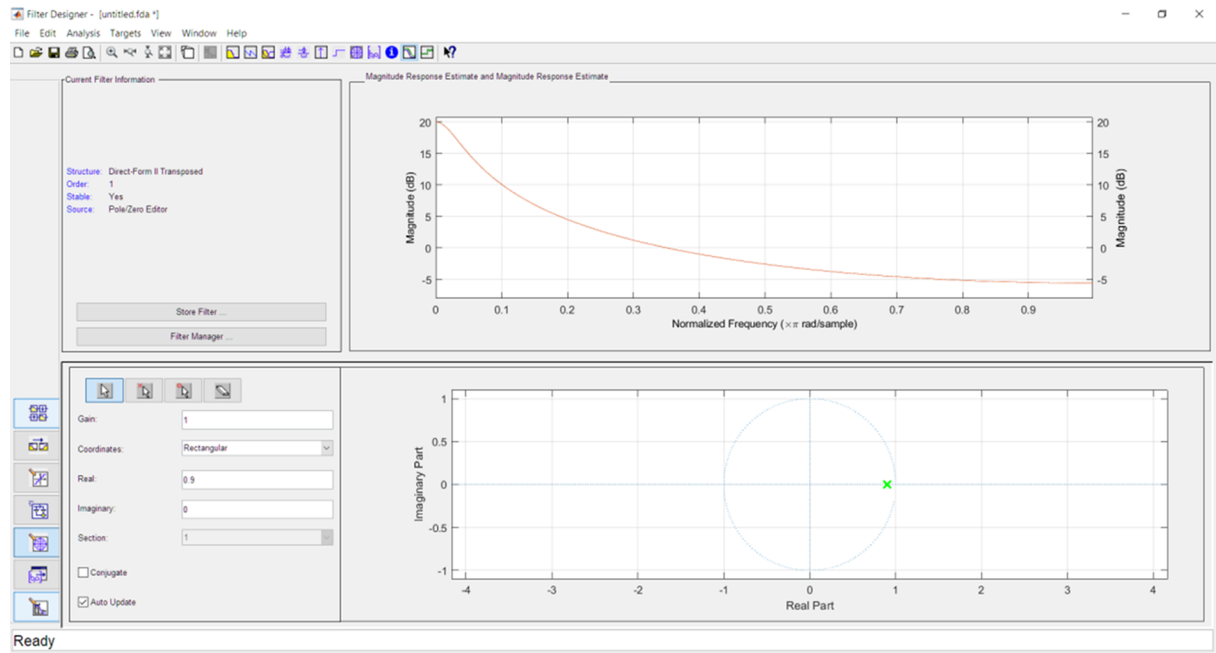
#### Ejemplo 4

Se pide calcular la representación en módulo del siguiente sistema:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{(e^{j\omega} - 0.9)}$$

La ganancia de un sistema en dB se define como  $|H(e^{j\omega})| = 20 \log_{10}(|H(e^{j\omega})|)$  que, en el caso concreto del ejemplo, lleva a la siguiente función de transferencia:

Figura 3. Función de transferencia del sistema



### Ejemplo 5

Se pide calcular la representación en módulo del siguiente sistema:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{(e^{j\omega} - a)}$$

y representar la función de transferencia para  $a = 0.99$ ,  $a = 0.75$  y  $a = 0.5$

Figura 4. Polo situado en 0.99

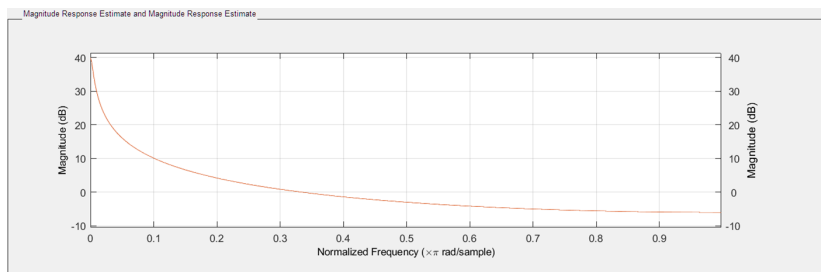


Figura 5. Polo situado en 0.75

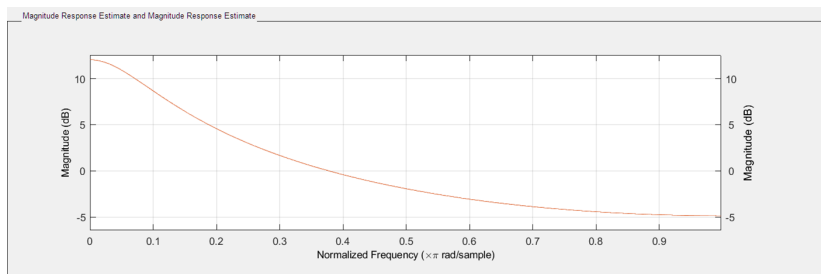
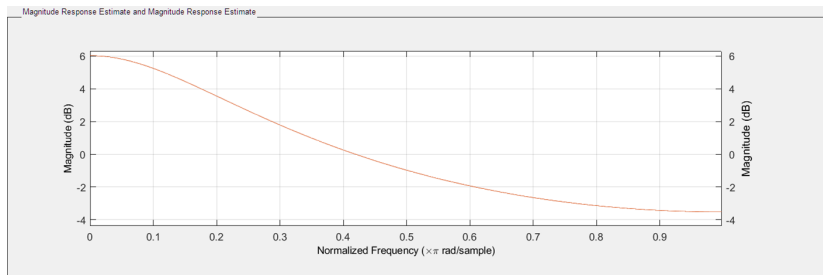


Figura 6. Polo situado en 0.5

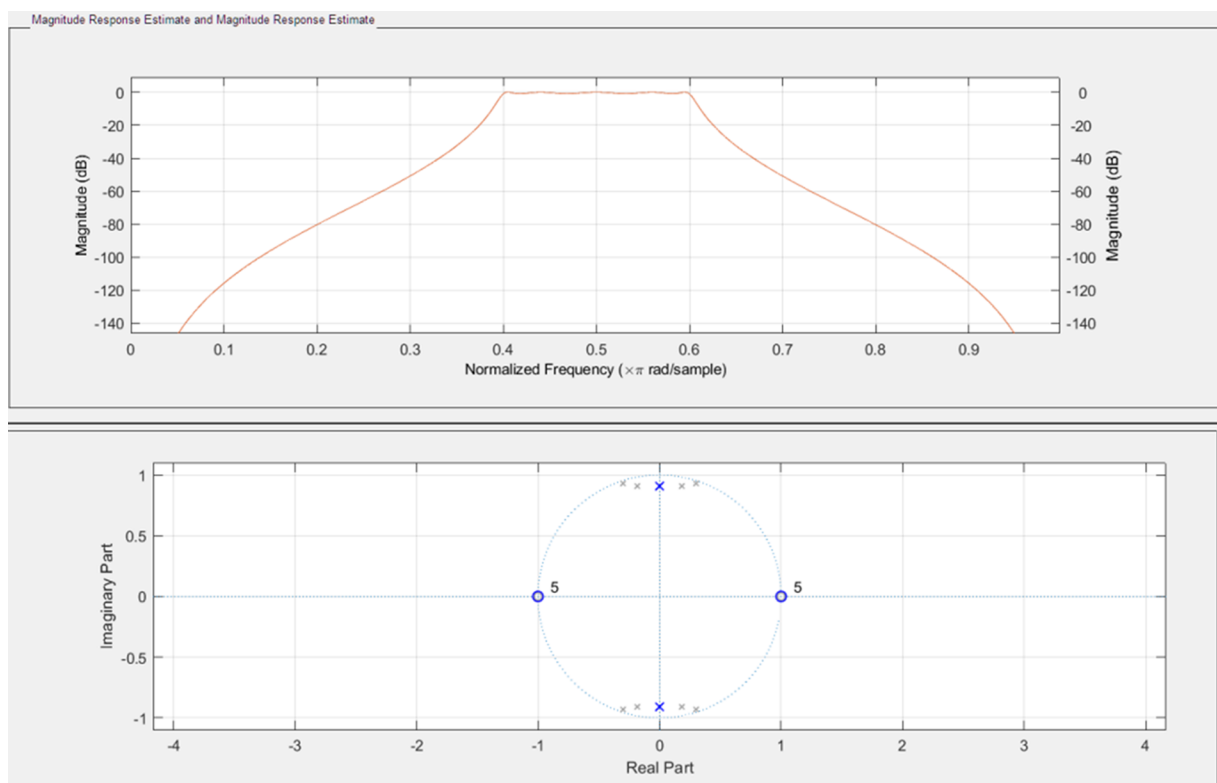


Este ejemplo nos permite observar que cuanto más cercano esté el polo al círculo unidad más abrupta será la modificación de la función de transferencia, que en este caso concreto se traduce con un filtro más selectivo en frecuencia. Por otra parte, a medida que el polo se aleja del círculo unidad, nos lleva a filtros con una pendiente menos abrupta o filtros menos selectivos en frecuencia.

### Ejemplo 6

En este ejemplo se analiza el diagrama de polos y ceros de un filtro diseñado con unas características de filtro paso banda con una banda de paso centrada en  $\omega = \pi/2$ .

Figura 7. Ejemplo de filtro pasa-banda



Este ejemplo ilustra la posición de los polos y los ceros del filtro diseñado. Al tratarse de un filtro paso banda, este se diseña para tener ganancia 0 en  $\omega = 0$  y  $\omega = \pi$  tal y como se observa en el posicionamiento de los ceros del sistema. Los polos se encuentran ubicados cerca del círculo unidad en posiciones alrededor de  $e^{j\omega\pi/2}$ , y los simétricos conjugados alrededor de  $e^{-j\omega\pi/2}$ .

Las técnicas de diseño de filtros son métodos numéricos que resuelven ecuaciones complejas con el fin de aproximar la función de transferencia del sistema a una plantilla ideal. Aunque no forma parte de los objetivos de estudio de esta asignatura, conviene entender la relación entre la función de transferencia y la ubicación de los polos y los ceros del sistema.

El orden del filtro vendrá determinado por el número de polos en el caso de que se trate de un filtro de respuesta impulsional infinita o filtro IIR (siglas en inglés de *Infinite Impulse Response*) o por el número de ceros en el caso de tratarse de filtros de respuesta impulsional finita o filtros FIR (siglas en inglés de *Finite Impulse Response*).

La fase del sistema es el segundo aspecto de relevancia en el diseño del filtro y en determinadas condiciones de diseño puede ser un aspecto de gran importancia.

### 6.2.2. La fase de la función de transferencia

De forma análoga al estudio del módulo, podemos observar qué efectos tienen cada uno de los polos y ceros del sistema sobre la función de transferencia.

$$\angle H(e^{j\omega}) = \angle \left( G \frac{\prod_{k=1}^K (e^{j\omega} - c_k)}{\prod_{l=1}^L (e^{j\omega} - p_l)} \right) \quad (97)$$

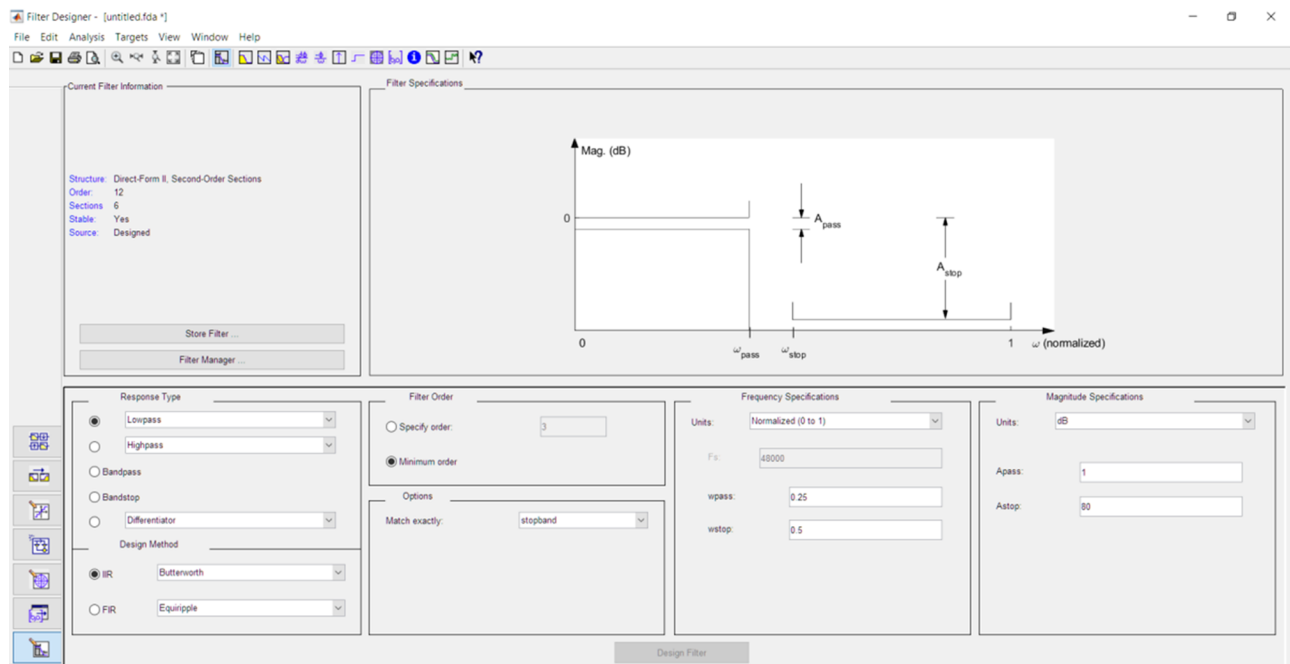
$$\angle H(e^{j\omega}) = \pi \text{sign}(G) + \sum_{k=1}^K \angle (e^{j\omega} - c_k) - \sum_{l=1}^L \angle (e^{j\omega} - p_l) \quad (98)$$

Esta expresión aplica la propiedad de la fase del producto de complejos, es decir, la suma de fases de numeradores menos la suma de fases de los denominadores. Existe un primer término que será cero en el caso de que  $G$  sea positivo o  $\pi$  para el caso de ganancias negativas.

Esta expresión nos hace ver que diseñar un filtro teniendo en cuenta requerimientos de módulo y fase de forma simultánea es una tarea prácticamente imposible. Es por ello por lo que las técnicas de diseño de filtros normalmente trabajan a partir de plantillas del módulo de la función de transferencia, es decir, determinamos qué grupo de frecuencias queremos que pasen a la salida del sistema y qué grupos de frecuencias queremos que desaparezcan.

La figura 8 nos muestra que el diseño del filtro se hace principalmente sobre las características en módulo de la función de transferencia.

Figura 8. Ejemplo de una plantilla de especificaciones de diseño de un filtro



El caso de la fase es una característica mucho menos manejable en el proceso de diseño, de forma que existen diferentes técnicas de diseño de filtro y cada una de ellas tendrá unas particularidades en cuanto a la fase. No obstante, en determinadas circunstancias la fase puede ser el aspecto principal de diseño y llevar a unas técnicas concretas de diseño de filtros, como veremos a continuación.

### Fase lineal y fase no lineal

Los filtros de fase lineal son de gran interés en algunas aplicaciones del ámbito del procesamiento de señal. Imaginemos un sistema retardador con la siguiente la respuesta impulsional:

$$h[n] = \delta[n - n_0] \quad (99)$$

con la siguiente función de transferencia:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_0} \quad (100)$$

Este sistema corresponde a un filtro pasa todo que permite el paso de todas las frecuencias por igual y, como vemos, la característica principal del filtro es que su fase es lineal. La conclusión que podemos extraer es que cuando un filtro tiene unas características de fase lineal, el retardo asociado para cada una de las frecuencias será el mismo y todos los armónicos a la salida del sistema tendrán el mismo retardo.



Cuando un sistema no tiene fase lineal implica que unas frecuencias correrán más que otras al atravesar el sistema, pudiéndose producir distorsiones en la señal de salida por las características de la fase.

Los filtros de fase lineal tan solo se pueden conseguir si la respuesta impulsional del mismo cumple condiciones de simetría par o impar. Este hecho hace que la existencia de filtros de fase lineal causales tan solo se pueda conseguir con filtros FIR, de tal forma que cuando sea necesario diseñar un filtro de fase lineal deberemos recurrir a este tipo de sistemas.

### Retardo de grupo

El retardo de grupo de un sistema se define matemáticamente como:

$$\tau(\omega) = -\frac{d}{d\omega} \{ \angle H(e^{j\omega}) \} \quad (101)$$

Para el caso de un sistema de fase lineal como el visto en el subapartado anterior, el retardo de grupo respondería al siguiente valor:

$$\tau(\omega) = -\frac{d}{d\omega} \{ -j\omega n_0 \} = n_0 \quad (102)$$

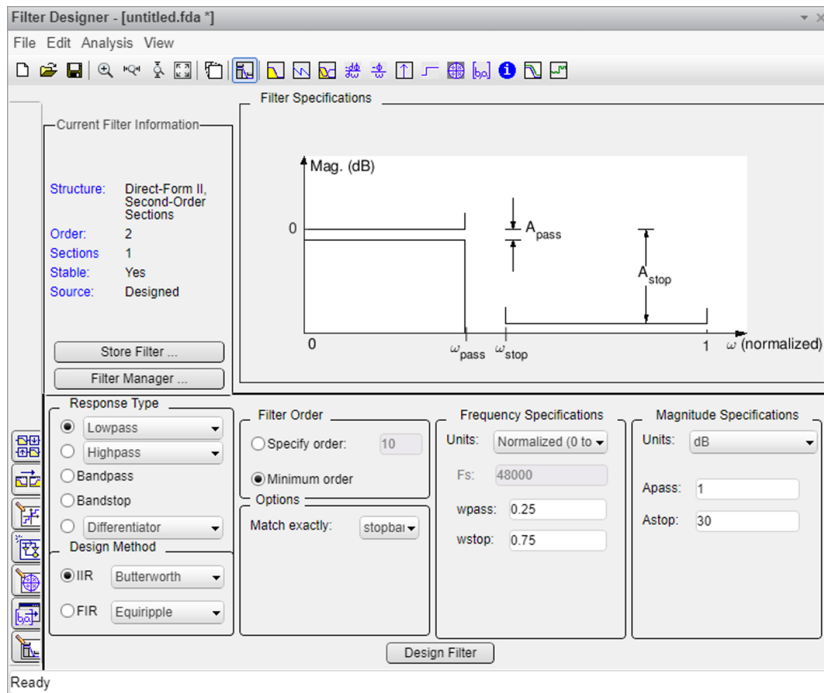
La interpretación física del retardo de grupo es el número de muestras que cada una de las frecuencias verá retardada a la salida del sistema. En el caso de un filtro de fase lineal se observa que el retardo de grupo será constante, es decir, todas las frecuencias se retrasan el mismo número de muestras.

En el caso de un sistema de fase no lineal, el retardo de grupo variará en frecuencia, de forma que tendremos paquetes de energía que pasarán más rápido a través del filtro y paquetes de energía que irán más lentos. Este concepto será más fácil de interpretar si se ven algunos ejemplos prácticos.

### Ejemplo 7

Se pide calcular un filtro que cumpla con las siguientes especificaciones de diseño:

Figura 9. Plantilla de diseño de un filtro paso-bajo discreto



Para ello se utilizarán tres técnicas de diseño y se compararán los resultados entre cada una de ellas para poder apreciar las diferencias que aparecen cuando se aplica el diseño a partir de diferentes tipologías de filtros.

La primera opción corresponderá a un filtro IIR tipo Butterworth que dará el siguiente resultado:

Figura 10a. Diseño filtro Butterworth orden 3

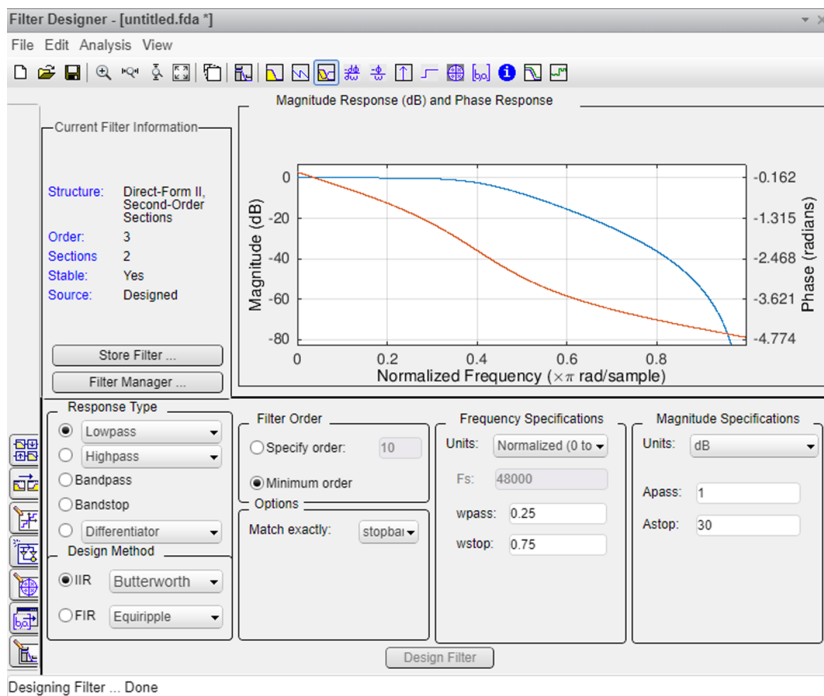
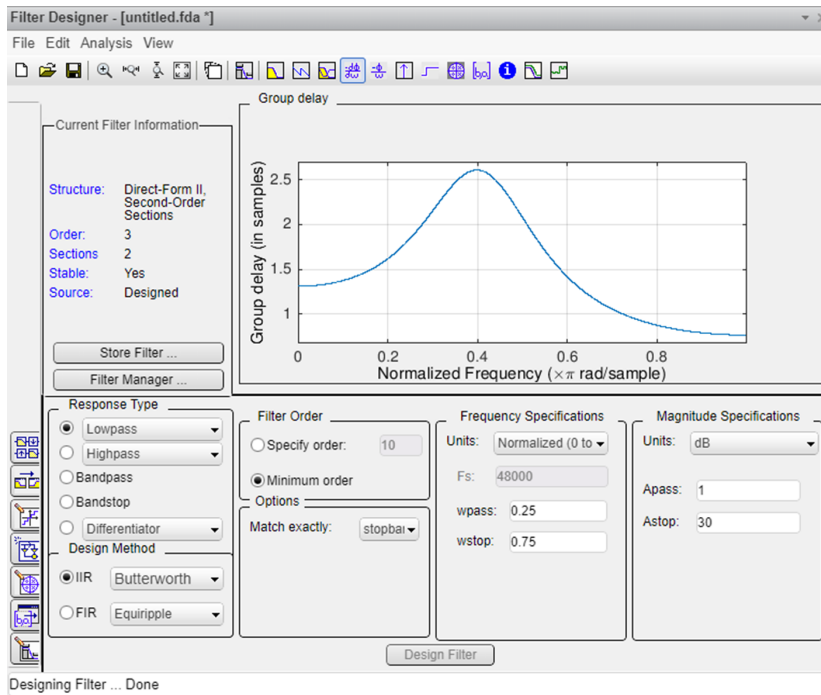


Figura 10b. Diseño filtro Butterworth orden 3



Se observa por los resultados que el sistema necesita un orden 3 para cumplir con las especificaciones. La representación de la fase nos indica un comportamiento bastante lineal en la banda de paso, que se traduce en un retardo de grupo entre 1.3 y 2 muestras en la banda de paso que se extiende hasta  $f = 0.25$ .

Se repite el proceso de diseño, en este caso para un filtro Chebyshev tipo I, con la misma plantilla de especificaciones y se obtiene el siguiente resultado:

Figura 11a. Diseño filtro Chebyshev tipo I de orden 2

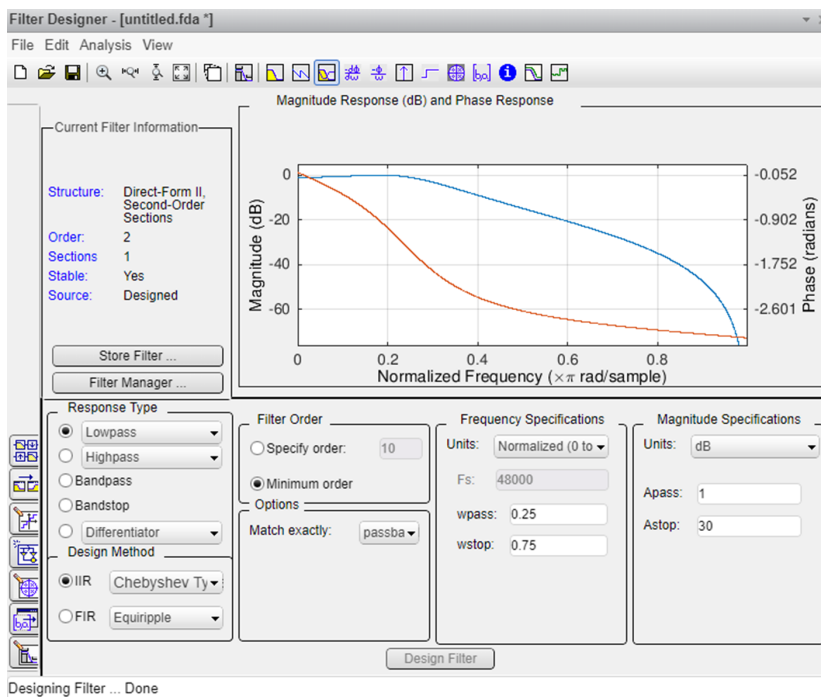
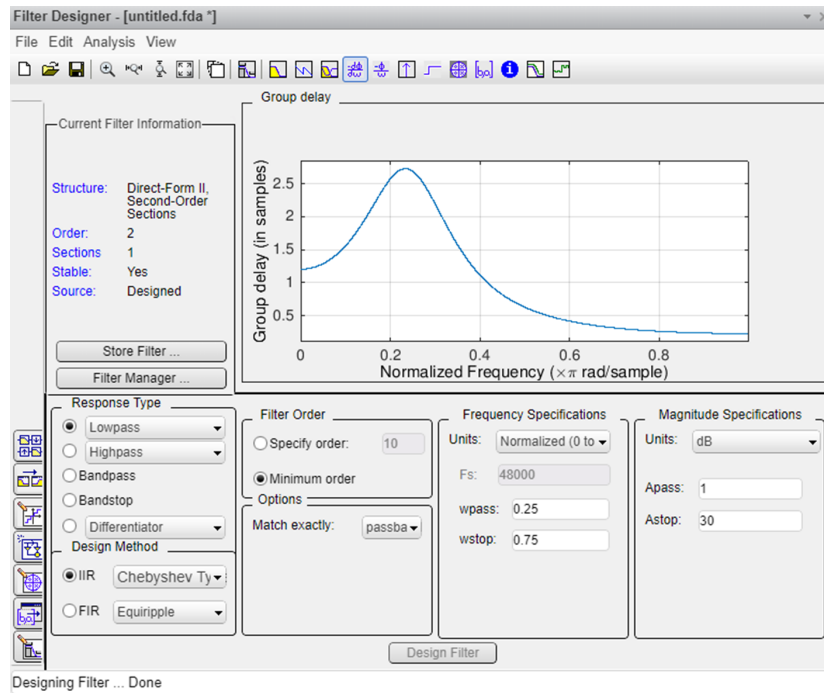


Figura 11b. Diseño filtro Chebyshev tipo I de orden 2



La primera diferencia que se observa es que este tipo de filtro necesita un orden menor para cumplir con las especificaciones de diseño, cosa que *a priori* puede parecer una clara ventaja. No obstante, se observa que la banda de paso tiene un pequeño rizado en el módulo y lo más significativo es que el retardo de grupo en la banda de paso estará entre 1.3 y 2.7 muestras dentro de la banda  $f = [0 \dots 0.25]$ .

El filtro de Chebyshev tipo I permite diseñar con un orden menor a cambio de tener unas peores características en lo referente al retardo de grupo, cosa que provocaría una mayor distorsión de fase de la señal de entrada.

Según la aplicación en la que se esté trabajando, la distorsión de fase puede ser muy significativa. Si imaginamos el diseño de un filtro para un receptor de comunicaciones que utilice una modulación de fase será fácil entender que este filtro puede provocar una mayor distorsión que se traduzca en unas peores prestaciones del receptor. Es por ello que la aplicación será la que condicionará en mayor medida la tipología de filtro escogida para el diseño.

Finalizaremos el ejemplo con el diseño de un filtro de fase lineal de tipo FIR.

Figura 12a. Diseño filtro FIR Least-Squares

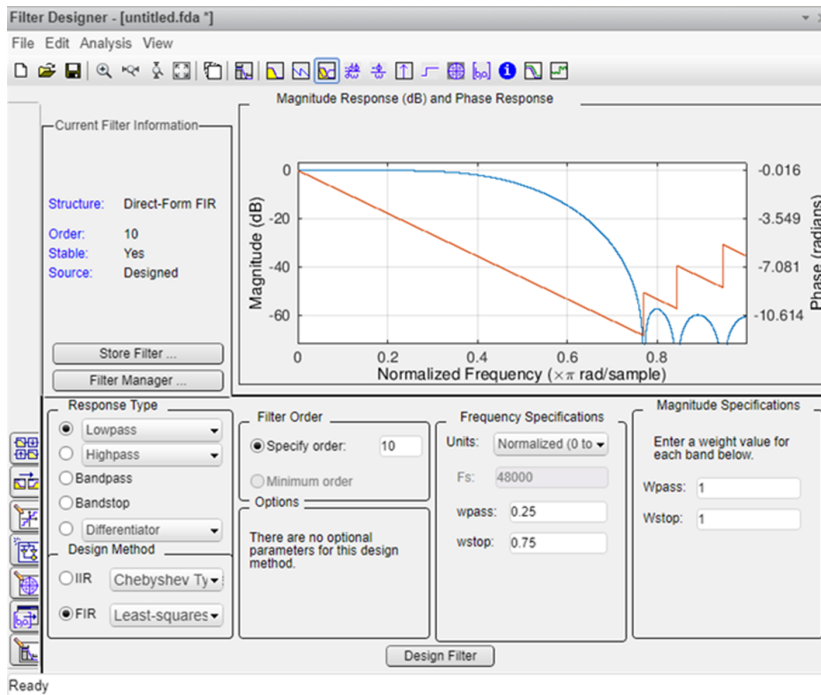
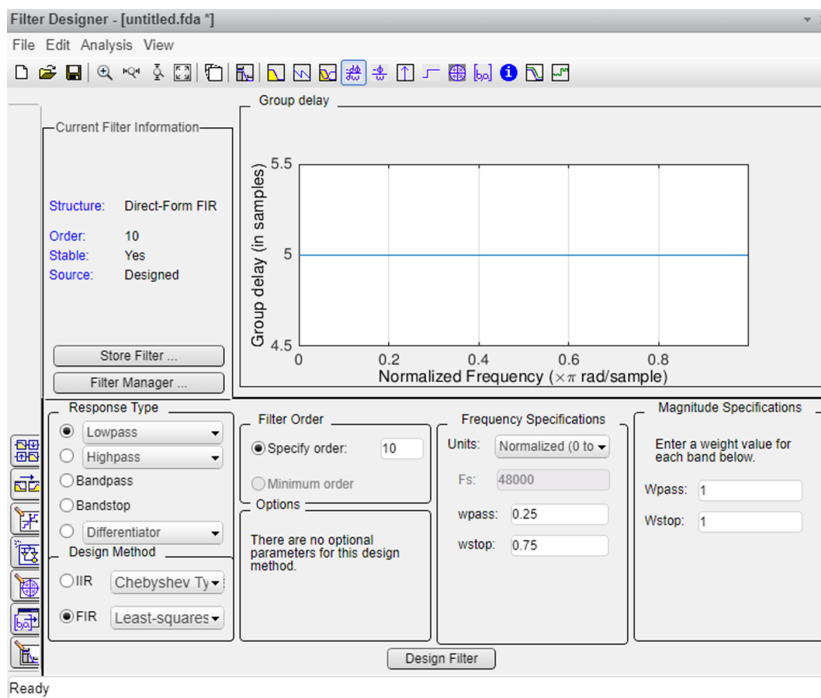
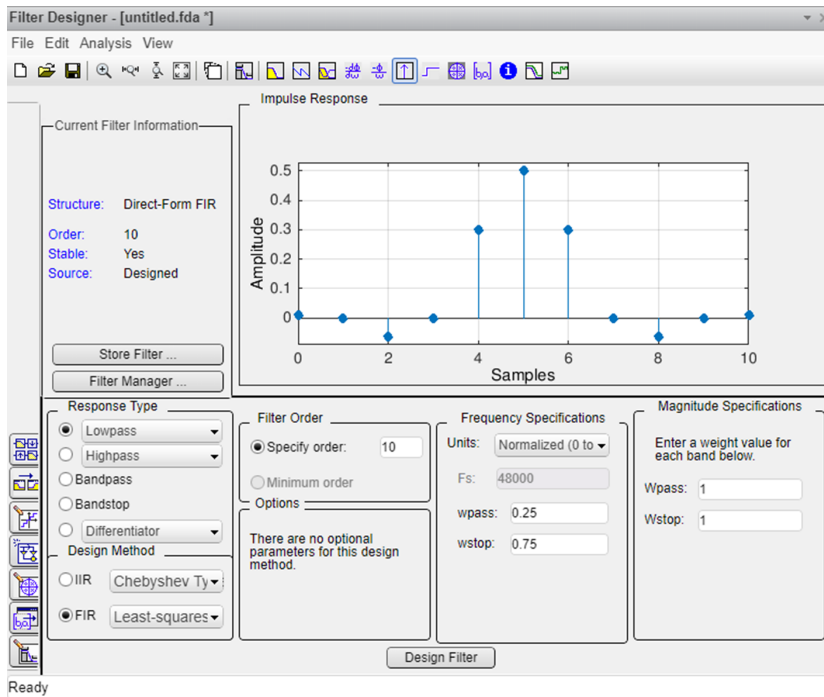


Figura 12b. Diseño filtro FIR Least-Squares



Tal y como se aprecia, la primera gran diferencia entre los filtros FIR y los filtros IIR es que para obtener las mismas especificaciones de diseño se requiere de un orden mucho mayor. En este último caso, el orden del filtro será 10. Por otra parte, se observa que la banda de transición entre la banda de paso y la banda de atenuación tiene una forma diferente a los filtros FIR y con una atenuación menos abrupta en la transición. Finalmente, el retardo de grupo del filtro en este caso es constante a un valor de 5 muestras, como consecuencia de la fase lineal que presenta el sistema. Para finalizar el análisis podemos observar en la figura 13 la respuesta impulsional del sistema FIR:

Figura 13. Respuesta impulsional filtro FIR Least-Squares



La respuesta impulsional del filtro muestra que presenta una simetría par centrada en la muestra 5. Recordemos que 5 corresponde justamente al retardo de grupo del sistema y es donde se centra el pico de energía de la respuesta impulsional.

Finalmente, para acabar con la comparativa se representará la respuesta al escalón de los tres tipos de filtro paso-bajo diseñados.

Figura 14a. Comparativa de las respuestas al escalón de los filtros diseñados

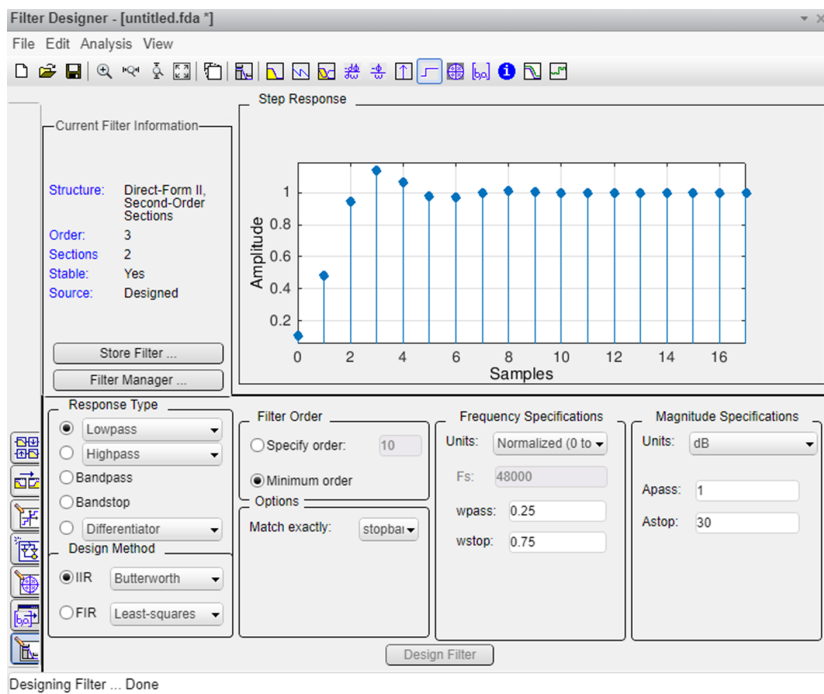


Figura 14b. Comparativa de las respuestas al escalón de los filtros diseñados

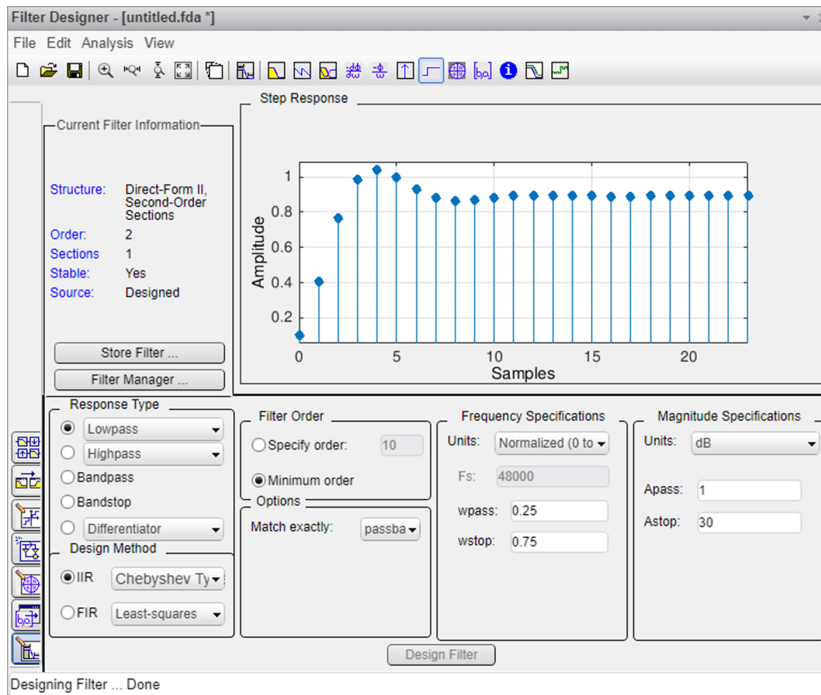
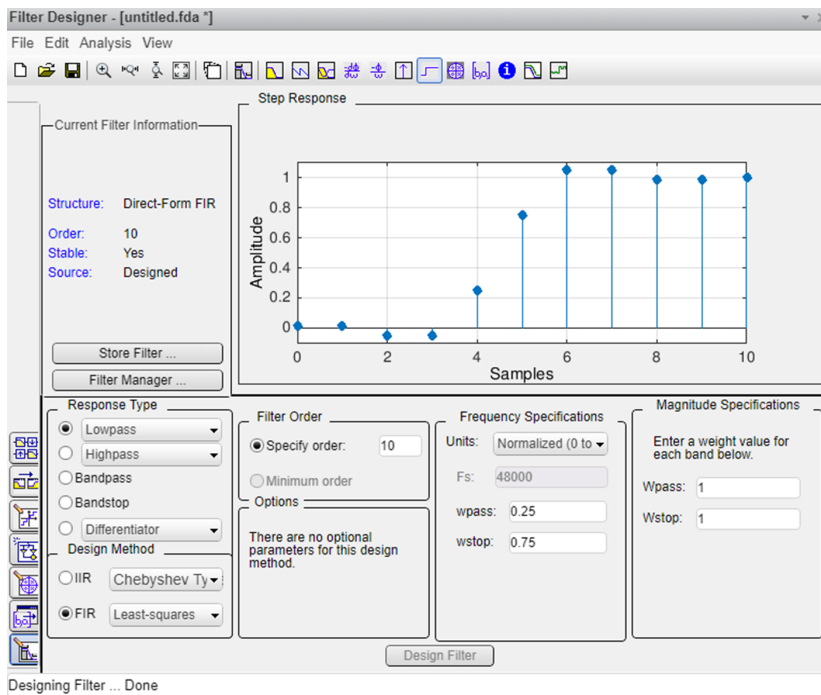


Figura 14c. Comparativa de las respuestas al escalón de los filtros diseñados



El escalón unitario es una función que tiene una transición abrupta de componentes de alta frecuencia y un valor estacionario de baja frecuencia. Lo que se espera de los filtros es que eliminen la transición abrupta y que mantengan el valor promedio de la señal de entrada.

Los tres filtros cumplen con esta característica, pero lo hacen de forma diferente. El filtro de Butterworth obtiene la respuesta constante a partir de la segunda o tercera muestra (retardo de grupo) y tras una pequeña oscilación se estabiliza en el valor constante 1. El filtro de Chebyshev tipo I tiene una respuesta al escalón parecida, pero se observa que el valor estacionario no se estabiliza en 1, sino que lo hace en un valor algo inferior, fruto del rizado que se comentaba en la banda de paso. Finalmente, el filtro FIR genera la aproximación del escalón con un retardo de 5 muestras y estabiliza completamente la señal después de la muestra 10, que corresponde a la longitud de la respuesta impulsio-

nal. Las tres tipologías buscan realizar la misma función con aproximaciones numéricas diferentes, que serán las que marcarán las diferencias entre un filtro u otro.

El buen conocimiento de las características de cada filtro será fundamental para que el diseñador escoja la mejor opción en las circunstancias de diseño específicas de la aplicación.



## Resumen

En este módulo se ha estudiado la TFSD como herramienta que permite obtener la representación frecuencial de señales y sistemas discretos, así como la SDF como herramienta para obtener la descomposición en serie para las señales discretas periódicas.

La TFSD es la herramienta clave en el estudio de los sistemas discretos en el dominio de la frecuencia, y tal y como se ha visto en el módulo, no se trata más que una particularización de la transformada  $z$  en el círculo unidad.

La descomposición en el espacio de Fourier es de especial relevancia en los sistemas LIT debido a que las exponenciales complejas son autofunciones de estos sistemas, es decir, si a la entrada ponemos una exponencial compleja y el sistema es LIT, a la salida siempre obtendremos una exponencial compleja de la misma frecuencia afectada en módulo y desfasada según el efecto del sistema a esa frecuencia. Este hecho hace que las complejas operaciones de convolución en el dominio transformado se conviertan en productos, con la simplificación que esto produce en la teoría de análisis y diseño de sistemas.

El dominio temporal y el frecuencial no son más que dos representaciones complementarias del mismo espacio y la transformada nos permitirá conmutar entre un espacio u otro en función de las necesidades del momento.

Al igual que ocurría con la transformada  $z$ , la TFSD presenta una serie de propiedades que son de gran utilidad en dos aspectos principalmente. El primero de ellos es la interpretación conceptual de los efectos de determinadas operaciones en ambos dominios, que lleva a la comprensión de propiedades vitales como la de modulación en el campo de las telecomunicaciones. El segundo aspecto es la simplificación de la operativa matemática en el cálculo de transformadas, que permite, una vez conocidas las transformadas de unas señales tipo, obtener de forma sencilla y ágil las transformadas de señales relacionadas a partir de las propiedades.

Finalmente, se estudia la caracterización de sistemas LIT en el dominio de la TFSD. Este apartado está más orientado a la visión de un sistema que transforma una determinada señal de entrada.

