Prueba de Evaluación Continua_4 (PEC4)

Presentación

Esta PEC consta de 6 ejercicios que evalúan los conceptos adquiridos en el módulo 4.

Competencias

1. Conocimiento de materias básicas y tecnologías, que capaciten para el aprendizaje de nuevos métodos y nuevas tecnologías, y doten al estudiante de una gran versatilidad para adaptarse a nuevas situaciones.
2. Comprensión y dominio de los conceptos básicos de sistemas lineales y las funciones y transformaciones relacionadas, y su aplicación para la resolución de problemas propios de la ingeniería.
3. Capacidad para analizar, codificar, procesar y transmitir información multimedia empleando técnicas de procesamiento analógico y digital de la señal.

Objetivos

1. Comprender el interés del tratamiento digital de señales analógicas.
2. Entender la relación entre la respuesta de un sistema en tiempo continuo y su equivalencia en el dominio del tiempo discreto.
3. Conocer las operaciones de diezmado e interpolación para llevar a cabo cambios en la frecuencia de muestreo, y comprender el impacto que tienen en el dominio frecuencial.
4. Conocer las alternativas para implementar sistemas en tiempo discreto, lineales e invariantes, para una respuesta frecuencial dada.

Descripción de la PEC a realizar

Resolver los problemas propuestos

Recursos

Apuntes y problemas resueltos del módulo 4 que se encuentran en el foro.

Formato y fecha de entrega

Se entregará editada y/o escaneada en un único archivo en formato PDF, con el siguiente nombre: apellidos_nombre_PEC4.pdf

Problema 1 (2 puntos)

Considera la señal en tiempo continuo $x(t) = \sin(2\pi F_1 t) + \cos(2\pi F_2 t)$ donde $F_1 = 100Hz$ y. $F_2 = 150Hz$

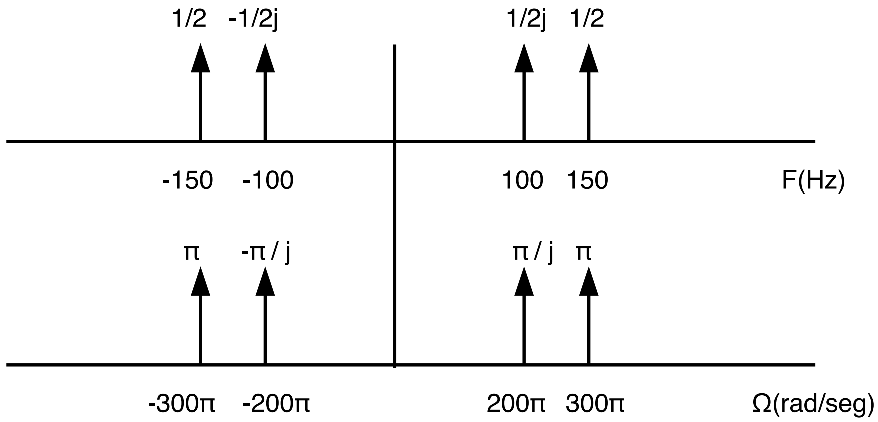
(a) Calcula la transformada de Fourier de $x(t)$, $X(\Omega)$. Escribe la expresión de la transformada en función de la frecuencia Ω (rad/seg) y también en función de la frecuencia $F = \Omega/_{2\pi}$ (Hz).

Realiza dos dibujos de la transformada, uno con el eje de frecuencias en Ω (rad/seg) y otro con el eje de frecuencias en $F = \Omega/_{2\pi}$ (Hz).

En los dibujos escribe claramente los valores de las frecuencias y amplitudes significativas

$$X(F) = \frac{1}{2j}[\delta(F - F_1) - \delta(F + F_1)] + \frac{1}{2}[\delta(F - F_2) + \delta(F + F_2)]$$

$$X(\Omega) = 2\pi\frac{1}{2j}[\delta(\Omega - \Omega_1) - \delta(\Omega + \Omega_1)] + 2\pi\frac{1}{2}[\delta(\Omega - \Omega_2) + \delta(\Omega + \Omega_2)]$$



$F_1 = 100Hz \rightarrow \ \Omega_1 = 2\pi F_1 = 200\pi$

$F_2 = 150Hz \rightarrow \ \Omega_2 = 2\pi F_2 = 300\pi$

(b) Cuál es la frecuencia de Nyquist de $x(t)$? Exprésala en rad/seg y en Hz.

$\Omega_{Nyquist} = 2 \,.\, 2\pi 150 = 600\pi \; rad/seg$

$F_{Nyquist} = 300Hz$

(c) Muestreamos $x(t)$ a frecuencia $F_m = 400Hz$

Calcula la expresión de la señal discreta x[n]. Analiza la periodicidad de x[n]. Calcula y dibuja los valores de 10 muestras de la señal, para n=1,...,10

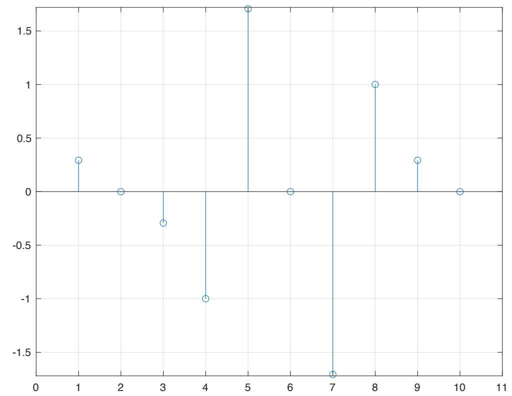
$x[n] = x(t)|_{t=nT_m}$ $T_m = 1/F_m = 1/400$

$$x[n] = \sin\left(2\pi 100 \frac{1}{400} n\right) + \cos\left(2\pi 150 \frac{1}{400} n\right) = \sin\left(2\pi \frac{1}{4} n\right) + \cos\left(2\pi \frac{3}{8} n\right)$$

El período es el m.c.m del período de las dos señales (4 y 8), es decir, 8

Diez muestras de la señal: por ejemplo para valores de n=1,...10

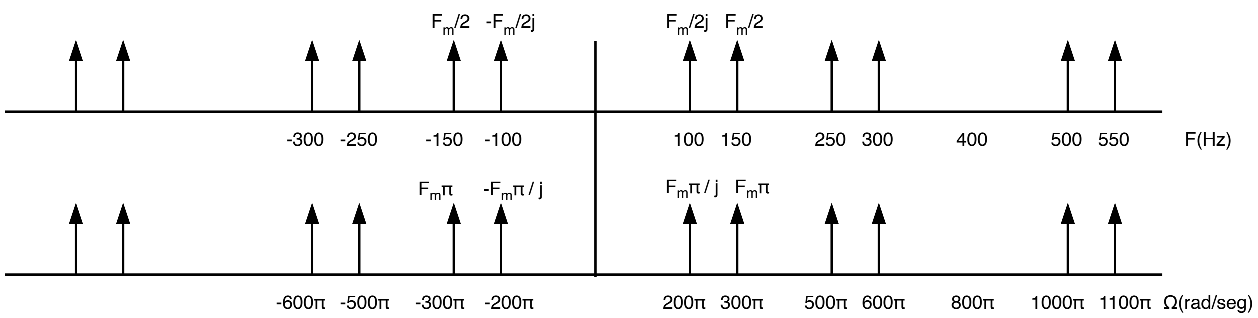
x[n] = [0.29, 0, -0.29, -1, 1.7, 0, -0.17, 0, -1.7, 1, 0.29, 0]



(d) Escribe la expresión de la transformada de Fourier $X_m(\Omega)$ de la señal muestreada x_m(t) en función de la frecuencia Ω (rad/seg) y también en función de la frecuencia $F = {}^{\Omega}/_{2\pi}$ (Hz).

Realiza dos dibujos de la transformada, uno con el eje de frecuencias en Ω (rad/seg) y otro con el eje de frecuencias en $F = {}^{\Omega}/_{2\pi}$ (Hz)

En los dibujos escribe claramente los valores de las frecuencias y amplitudes significativas



$$X_m(\Omega) = \frac{1}{T_m}\sum_k X(\Omega - \Omega_m k)$$

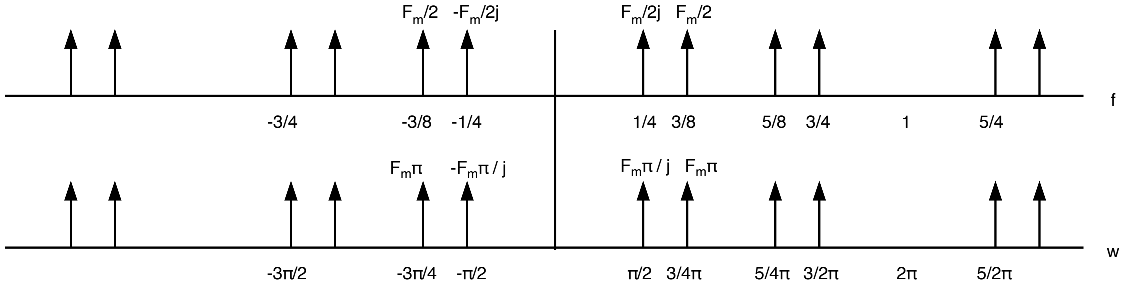
$$X_m(\mathrm{F}) = \frac{1}{T_m}\sum_k X(\mathrm{F} - \mathrm{F}_m k)$$

(e) Representa la transformada de Fourier de la señal discreta $X(e^{jw})$ en dos gráficos, uno con el eje de frecuencias en términos de ω y otro con el eje de frecuencias en términos de $f = {}^{\omega}/_{2\pi}$

En los dibujos escribe claramente los valores de las frecuencias y amplitudes significativas

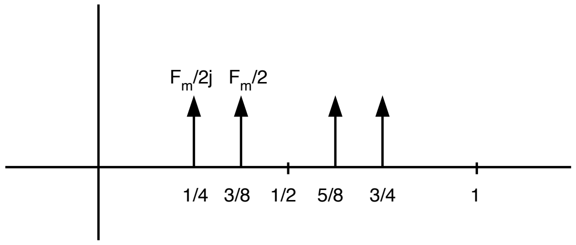
$X(e^{jw})$ cambia el eje de frecuencias: hay un escalado

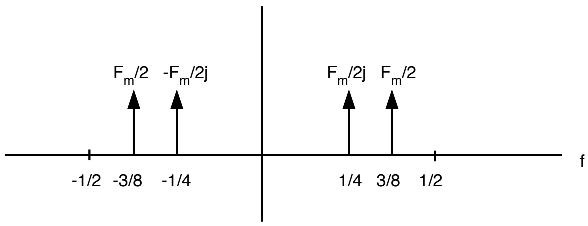
$\omega = \Omega \mathrm{T}_m = \frac{\Omega}{\mathrm{F}_m} = \frac{2\pi \mathrm{F}}{\mathrm{F}_m} \qquad f = F\mathrm{T}_m = \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{F}_m} = {}^{\omega}/_{2\pi}$



(f) Representa un único período de la transformada de Fourier del apartado (e), con frecuencias f en el intervalo [-0.5, 0.5), y en otro gráfico representa un período con frecuencias f en el intervalo [0, 1).

En los dibujos escribe claramente los valores de las frecuencias y amplitudes significativas





Ejercicio 2 (2 puntos)

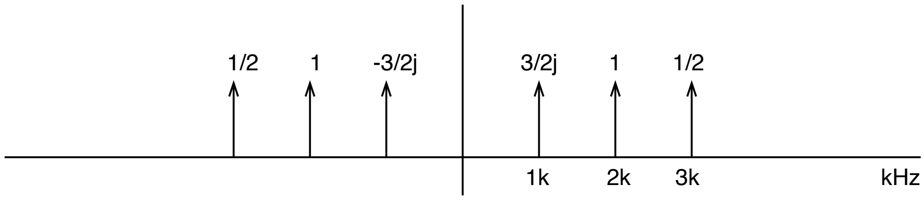
Se desea muestrear la señal continua

$x(t) = 3\sin(2000\pi t) + 2\cos(4000\pi t) + \cos(6000\pi t)$,

con un sistema conversor analógico-digital ideal, con frecuencia de muestreo F_m para obtener la señal discreta $x[n] = x(t)_{t=nT_m}$

(a) Calcula la transformada de Fourier de $x(t)$ y representa gráficamente su modulo (en la escala de frecuencias que prefieras, rad/seg or Hz)

$X(F) = \frac{3}{2j}[\delta(F - \mathrm{F}_1) - \delta(F + \mathrm{F}_1)] + [\delta(F - \mathrm{F}_2) + \delta(F + \mathrm{F}_2)] + \frac{1}{2}[\delta(F - \mathrm{F}_3) + \delta(F + \mathrm{F}_3)]$, F_1= 1k, F_2=2k, F_3=3k



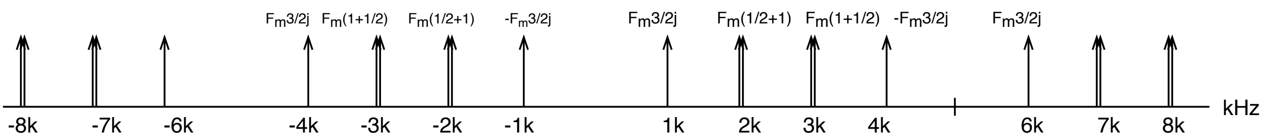
(b) ¿Cuál es la frecuencia de muestreo mínima para poder recuperar el contenido completo de la señal a partir de estas muestras?

La frecuencia mínima es la frecuencia de Nyquist, dos veces la frecuencia máxima de la señal, es decir 6kHz

La señal se muestrea con $F_m = 5kHz$

(c) Calcula y representa el módulo de la transformada de Fourier $X_m(\Omega)$ de la señal muestreada x_m(t)

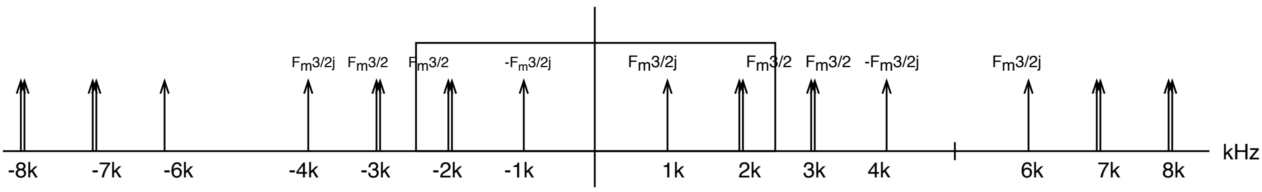
Aparecen réplicas del espectro en múltiplos de la frecuencia de muestreo, y un escalado en amplitud por Fm

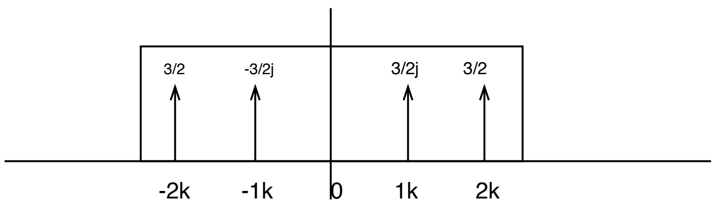


(d) A partir de la señal digital se recupera la señal analógica $y(t)$ con un conversor digital-analógico ideal. ¿Cuáles son la frecuencia de corte y la amplitud de este filtro? Calcula la expresión de la señal reconstruida $y(t)$. ¿Se produce aliasing? (justifica)

se aplica un filtro paso-bajo ideal H con frecuencia de corte $Fc = F_m/2 = 2{,}5kHz$

y con ganancia $G = \frac{1}{F_m} = 1/5000$

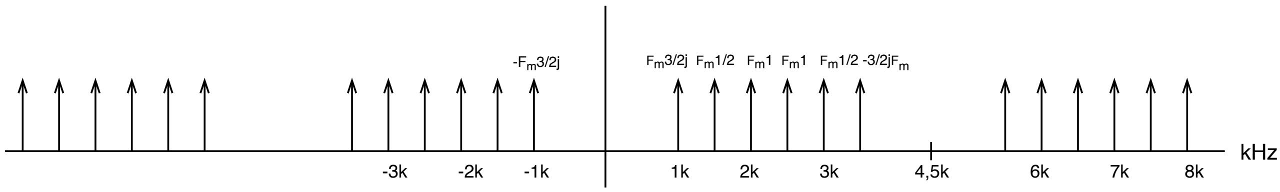




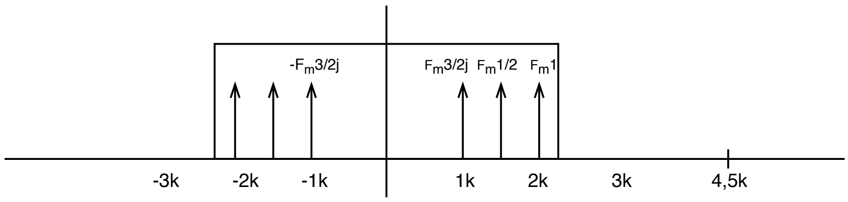
La señal reconstruida es

$x(t) = 3\sin(2\pi 1000t) + 3\cos(2\pi 2000t)$

(e) Repite los apartados (c) y (d) para $F_m = 4{,}5kHz$



Reconstrucción ideal:

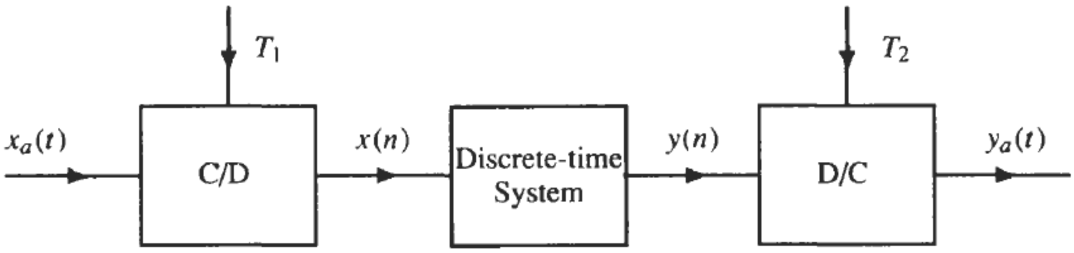


La señal reconstruida es

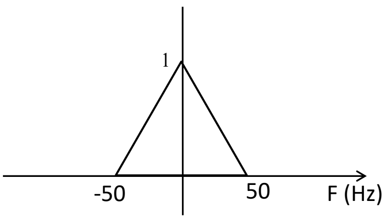
$x(t) = 3\sin(2\pi1000t) + \cos(2\pi1500t) + 2\cos(2\pi2000t)$

Ejercicio 3 (2 puntos)

Se utiliza el siguiente sistema para procesar una señal continua con un sistema discreto



Supongamos que la señal continua $x_a(t)$ está limitada en banda, con $X_a(\mathrm{F}) = 0$ para $|\mathrm{F}| > 50Hz$ como se muestra en la figura



El sistema discreto es un filtro paso-bajo ideal con frecuencia de corte $f_c = 0.2$

(a) Cuál debe ser la frecuencia de muestreo F_m para evitar aliasing?

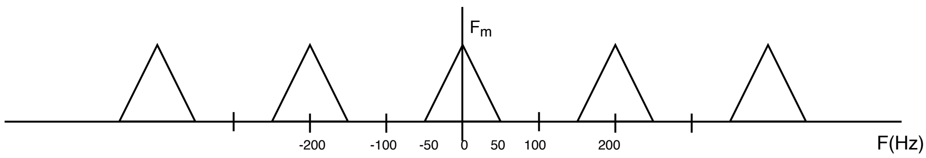
$F_{nyquist} = 2.F_{max} = 100Hz$

(b) Si $T_1 = \frac{1}{200}$ y $T_2 = \frac{1}{200}$

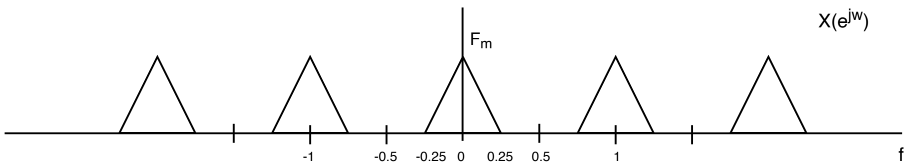
Dibuja los siguientes espectros de Fourier:

- de la señal continua muestreada $x_m(\mathrm{t})$, con espectro $X_m(\Omega)$
- de la señal discreta x(n), $X(e^{jw})$
- de la señal discreta filtrada y(n), $Y(e^{jw})$
- de la señal continua reconstruida $y_a(t)$, $Y_a(\Omega)$

Espectro de señal muestreada $X_m(\Omega)$



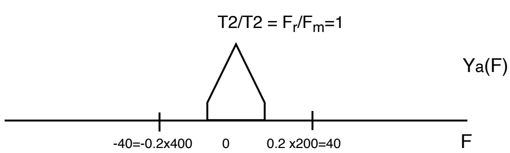
Espectro de señal discreta $X(e^{jw})$



Espectro de señal discreta filtrada $Y(e^{jw})$

Espectro de la señal continua reconstruida $y_a(t)$, $Y_a(\Omega)$

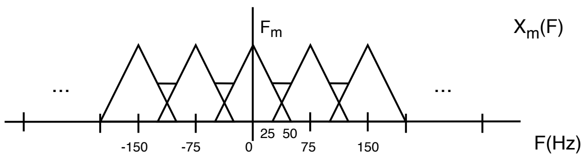
Si $T_2 = \frac{1}{200}$



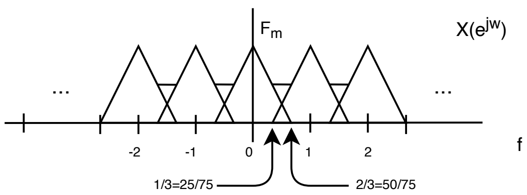
(c) Repite el apartado (b) para $T_1 = \frac{1}{75}$ y $T_2 = \frac{1}{75}$

En este caso la frecuencia de muestreo es $F_m = 75Hz$

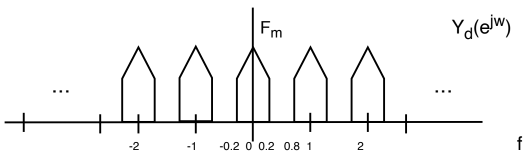
Espectro de señal muestreada $X_m(\Omega)$



Espectro de señal discreta $X(e^{jw})$

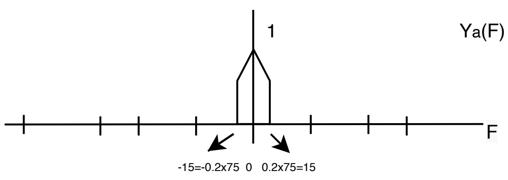


Espectro de señal discreta filtrada $Y(e^{jw})$



Espectro de la señal continua reconstruida $y_a(t)$, $Y_a(\Omega)$

Si $T_2 = \frac{1}{75}$



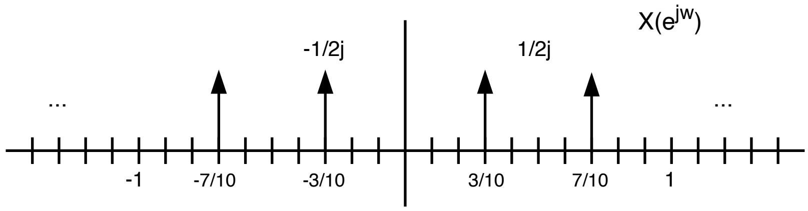
Ejercicio 4 (1 punto)

Sea $x[n] = \sin(2\pi f_1 n)$ una sinusoide de frecuencia discreta $f_1 = 0.3$

(a) Dibuja la transformada de Fourier de $x[n]$

La TF de $x[n]$ es periódica de período 1, en un período, para frecuencias en [0,1], hay dos deltas en las frecuencias $\mathrm{f} = 0.3$ y $\mathrm{f} = 1 - 0.3 = 0.7$, con amplitudes 1/2j y -1/2j, respectivamente

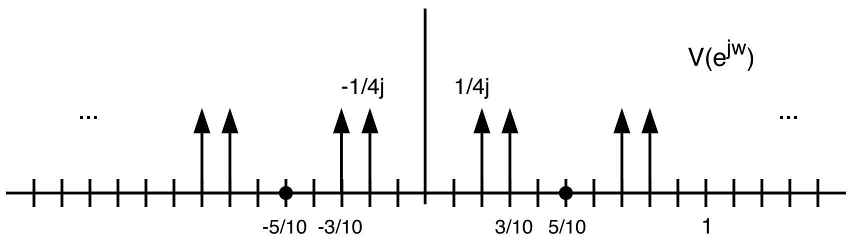
$$X(\mathrm{e}^{jw}) = \mathrm{X}(f) = \frac{1}{2j}\sum_k [\delta(f - f_1 - k) - \delta(f + f_1 - k)]$$



(b) Dibuja la transformada de Fourier de $v[n] = x[n].\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-2k]$

La transformada de Fourier de v[n] consiste en réplicas espectrales de X(F), en múltiplos de 1/N para factor de diezmado N=2

$$V(\mathrm{e}^{jw}) = \mathrm{V}(f) = \frac{1}{2}\sum_k X\left(f - \frac{k}{2}\right) = \frac{1}{2}\sum_k \frac{1}{2j}[\delta\left(f - f_1 - \frac{k}{2}\right) - \delta\left(f + f_1 - \frac{k}{2}\right)] =$$



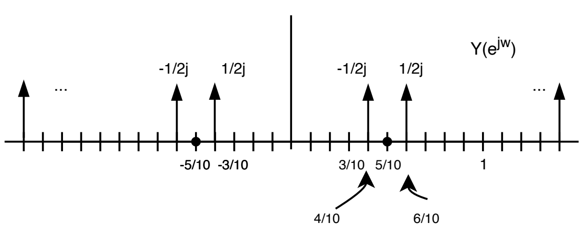
(c) Dibuja la transformada de Fourier de la secuencia diezmada $y[n] = v[2n] = x[2n]$.

¿Se produce aliasing? ¿Por qué?

La transformada de Fourier de la secuencia diezmada es una expansión frecuencial de V(F), factor N=2. (sólo 1 período)

$$Y(f) = V(\frac{f}{2}) = \frac{1}{2}[\frac{1}{2j}\left[\delta\left(\frac{f}{2} - f_1\right) - \delta\left(\frac{f}{2} + f_1\right)\right] = \frac{1}{2}[\frac{1}{2j}[2\delta(f - 2f_1) - 2\delta(f + 2f_1)]$$
$$= [\frac{1}{2j}[\delta(f - 2f_1) - \delta(f + 2f_1)]$$

(usando la propiedad de escalado $\delta\left(\frac{f}{2}\right) = 2\delta(f)$)



Sí hay aliasing porque $f_1 = 0.3 > \frac{1}{2N} = \frac{1}{4}$,

(d) Escribe la expresión de la secuencia diezmada y[n] utilizando frecuencias en el rango [0,1)

$$y[n] = \sin(2\pi 0.6n) = \sin(-2\pi 0.4n) = -\sin(2\pi 0.4n)$$

(e) ¿Cuál es el máximo valor de f_1 para el que no se produce aliasing?

$$f_{max} = \frac{1}{2N} = \frac{1}{4} = 0.25$$

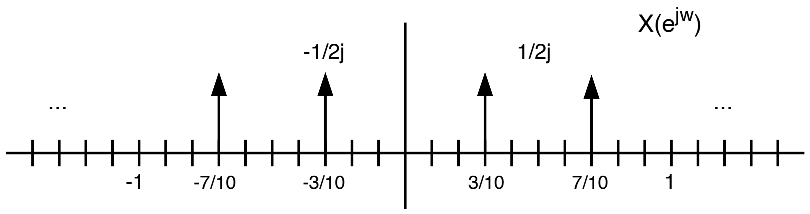
Ejercicio 5 (1 punto)

Sea $x[n] = \sin(2\pi f_1 n)$ una sinusoide de frecuencia discreta $f_1 = 0.3$

(a) Dibuja la transformada de Fourier de $x[n]$

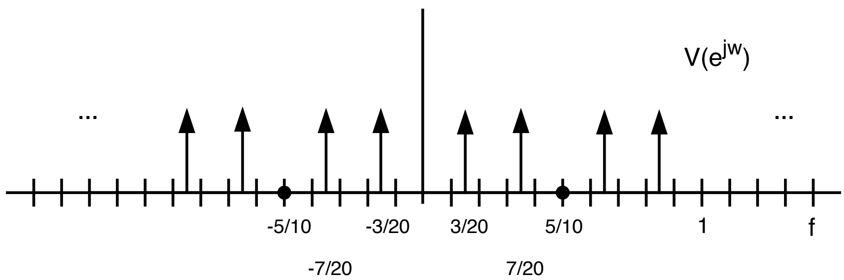
La TF de $x[n]$ es periódica de período 1, en un período, para frecuencias en [0,1], hay dos deltas en las frecuencias $f = 0.3$ y $f = 1 - 0.3 = 0.7$, con amplitudes 1/2j y -1/2j, respectivamente

$X(e^{jw}) = X(f) = \frac{1}{2j}\sum_k [\delta(f - f_1 - k) - \delta(f + f_1 - k)]$



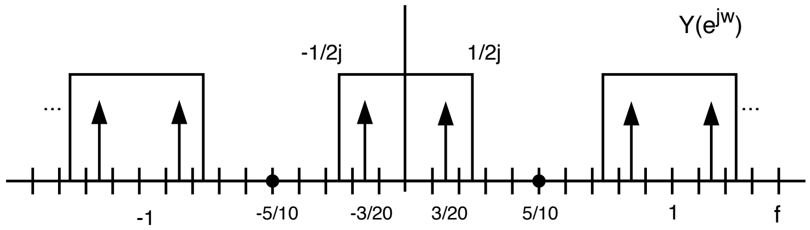
(b) Dibuja la transformada de Fourier de $v[n] = \begin{cases} x[\frac{n}{2}] & si\ \frac{n}{2}\ es\ entero \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$

Es el espectro de x[n] comprimido por un factor M=2,



(c) Dibuja la transformada de Fourier de la secuencia interpolada $y[n] = v[n] * h[n]$. Considera un filtro interpolador ideal, con frecuencia de corte 1/4

$Y(f) = V(f)H(f)$

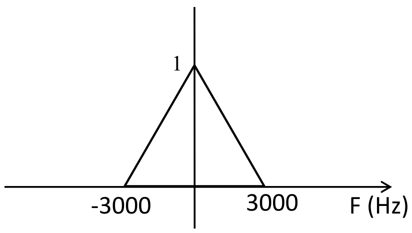


(d) Escribe la expresión de la secuencia interpolada y[n] utilizando frecuencias en el rango [0,1)

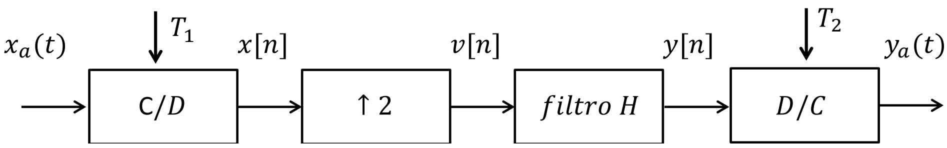
$$y[n] = \sin\left(2\pi(\frac{3}{20})n\right)$$

Ejercicio 6 (2 puntos)

Considera una señal en tiempo continuo $x_a(t)$ de ancho de banda 3 kHz cuya transformada de Fourier $X_a(\Omega)$ se representa en la siguiente figura (frecuencias F en Hz)



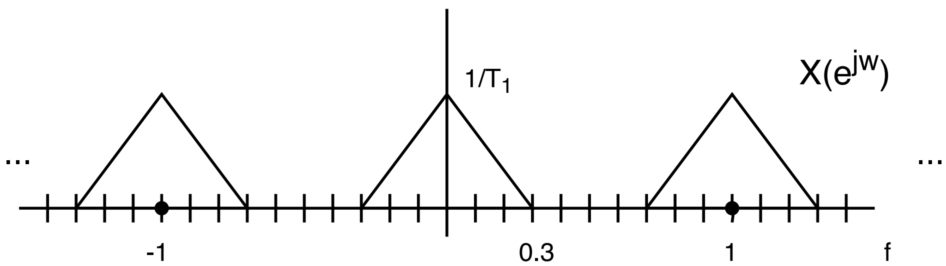
Dicha señal se aplica a la entrada de siguiente esquema de interpolación:



Donde 1/T1= 10kHz

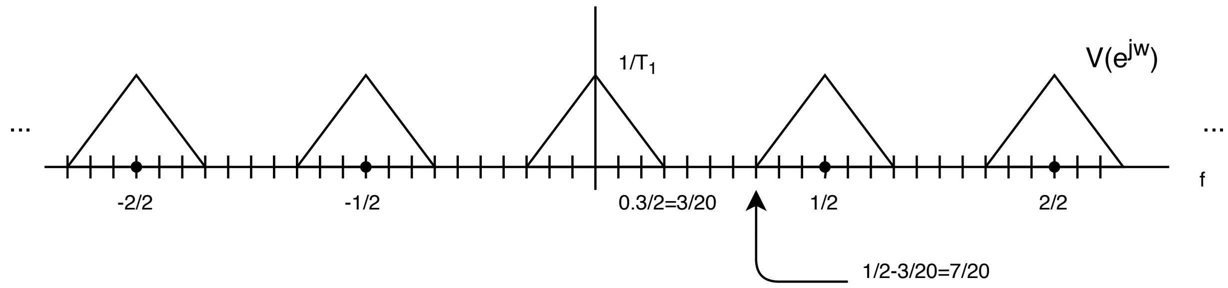
(a) Dibuja la transformada de Fourier de $x[n]$, $X(e^{jw})$ indicando claramente frecuencias y amplitudes.

Consiste en réplicas periódicas (período 1) del espectro de la señal continua (en frecuencias discretas)



(b) Dibuja la transformada de Fourier de $v[n]$, $V(e^{jw})$ indicando claramente frecuencias y amplitudes. ¿Se produce aliasing en el muestro de $x_a(t)$? ¿Por qué?

$V(e^{jw})$ consiste en una compresión frecuencial del espectro de x[n] por un factor de 2



(c) La interpolación ideal se realiza mediante un filtro digital paso bajo H, tal como se muestra en la figura. Indica cuál debe ser la ganancia del filtro H y el margen de valores posibles para la frecuencia de corte Fc del filtro

La ganancia es 2 y la frecuencia de corte debe estar entre 3/20 y 7/20

(d) ¿Cuál debe ser el valor de T2 en el conversor D/C?

Luego de la interpolación la frecuencia de reconstrucción debe ser 2 veces la frecuencia de muestreo, 20kHz, es decir T2 = 1/20k

(al interpolar por M la frecuencia de muestreo Fm pasa a ser M.Fm)