

---

# La transformada z

---

**Caracterización de señales digitales en el dominio z, caracterización de sistemas LIT digitales mediante su función de transferencia**

PID\_00262126

Germán Cobo Rodríguez

---

Tiempo mínimo de dedicación recomendado: 8 horas

---



**Germán Cobo Rodríguez**

El encargo y la creación de este recurso de aprendizaje UOC han sido coordinados por el profesor: José Antonio Morán Moreno (2019)

Primera edición: febrero 2019  
© Germán Cobo Rodríguez  
Todos los derechos reservados  
© de esta edición, FUOC, 2019  
Av. Tibidabo, 39-43, 08035 Barcelona  
Diseño: Manel Andreu  
Realización editorial: Oberta UOC Publishing, SL

*Ninguna parte de esta publicación, incluido el diseño general y la cubierta, puede ser copiada, reproducida, almacenada o transmitida de ninguna forma, ni por ningún medio, sea este eléctrico, químico, mecánico, óptico, grabación, fotocopia, o cualquier otro, sin la previa autorización escrita de los titulares de los derechos.*

# Índice

<b>Introducción.....</b>	<b>5</b>
<b>Objetivos.....</b>	<b>7</b>
<b>1. Caracterización de señales digitales en el dominio z.....</b>	<b>9</b>
1.1. La transformada z de señales digitales .....	9
1.2. Región de convergencia de la transformada z.....	12
1.3. Diagrama de polos y ceros de la transformada z.....	20
1.4. Relación entre la transformada z y la transformada de Laplace .....	27
<b>2. Transformadas z de señales analógicas típicas.....</b>	<b>28</b>
2.1. Señal delta discreta .....	28
2.2. Señal escalón unitario .....	30
2.3. Producto de señal exponencial por escalón unitario .....	31
2.4. Producto de polinomio por señal exponencial por escalón unitario .....	33
2.5. Producto de señal sinusoidal por escalón unitario .....	37
2.6. Producto de señal exponencial por sinusoidal por escalón unitario .....	39
2.7. Tabla de resumen de transformadas z de señales típicas .....	41
<b>3. Propiedades de la transformada z.....</b>	<b>43</b>
3.1. Linealidad .....	43
3.2. Desplazamiento en el dominio temporal .....	45
3.3. Escalado de la variable del dominio transformado .....	46
3.4. Conjugación compleja .....	47
3.5. Convolución en el dominio temporal .....	49
3.6. Derivación en el dominio transformado .....	50
3.7. Tabla de resumen de propiedades de la transformada z.....	51
<b>4. Cálculo de la transformada z inversa.....</b>	<b>52</b>
4.1. Factorización de señales racionales .....	52
4.2. Propiedades de la ROC .....	57
4.3. Estrategia de cálculo de la transformada z inversa .....	60
4.3.1. Generalización de la descomposición en fracciones simples .....	65
<b>5. Caracterización de sistemas LIT digitales mediante la transformada z.....</b>	<b>71</b>
5.1. Función de transferencia de un sistema LIT digital .....	71

5.2.	Caracterización de sistemas LIT digitales mediante su función de transferencia .....	74
5.2.1.	Cálculo de la salida en sistemas LIT digitales .....	75
5.2.2.	Propiedades de los sistemas LIT digitales .....	78
5.2.3.	Asociación de sistemas LIT digitales .....	84
5.3.	Resolución de ecuaciones en diferencias lineales de coeficientes constantes en el dominio transformado z.....	87
<b>Resumen.....</b>		92
<b>Ejercicios de autoevaluación.....</b>		93
<b>Solucionario.....</b>		95
<b>Bibliografía.....</b>		96

## Introducción

Partiendo del teorema de las autofunciones de los sistemas LIT digitales, en esta asignatura se presenta la herramienta matemática conocida como la transformada  $z$ , la cual permite caracterizar señales digitales y sistemas LIT digitales fuera del dominio del tiempo.

En general, esta asignatura está focalizado en la aplicación más relevante de la transformada  $z$  en la teoría de señales y sistemas: proporcionar un método de caracterización de los sistemas LIT digitales más sencillo, tanto en términos conceptuales como matemáticos, que el basado en la caracterización temporal de los mismos. Por esta razón, la teoría que se desarrolla en esta asignatura está enfocada exclusivamente en poder resolver aquellas cuestiones que la caracterización temporal de dichos sistemas deja abiertas.

La teoría sobre la transformada  $z$  es mucho más amplia que la que aquí veremos y, en todo caso, el lector interesado en ampliar estos contenidos tiene a su disposición literatura especializada sobre el tema muy extensa y bien documentada, con completos desarrollos teóricos y muy variados ejercicios prácticos (Oppenheim, Willsky, Nawab, 1996, págs. 741-815; Oppenheim, Schaffer, Buck, 1999, págs. 94-139; Proakis, Manolakis, 2007, págs. 147-223; Ogata, 1996).

En lo que a nosotros respecta, introduciremos las herramientas conceptuales y matemáticas necesarias para poder hacer las dos cosas siguientes:

- Poder evitar la caracterización temporal de los sistemas LIT digitales siempre que esta resulte insuficiente o, sobre todo, complicada, como veremos en el apartado 5 de este mismo módulo.
- Poder introducir la transformada de Fourier de señales digitales, que, aunque no es más que una particularización de la transformada  $z$ , resulta ser de gran importancia y utilidad en la teoría de señales y sistemas.

A tal efecto, en el apartado 1, se introduce la transformada  $z$  como herramienta de caracterización de señales digitales; en el apartado 2, se presentan las transformadas  $z$  de todo un conjunto de señales básicas; en el apartado 3, se describen las principales propiedades de la transformada  $z$ ; y en el apartado 4, se aborda el problema del cálculo de la transformada  $z$  inversa. Combinando las herramientas presentadas en estos cuatro primeros apartados, ya podremos, en el apartado 5, ver cómo caracterizar los sistemas LIT digitales mediante el uso de la transformada  $z$ .

Además, y con la intención de que esta sea una asignatura con la mínima carga matemática posible, se irán introduciendo a lo largo del mismo algunas herramientas de MATLAB que son de gran ayuda a la hora de realizar los cálculos que el uso de la transformada  $z$  requiere.

## Objetivos

Los principales objetivos de este módulo son los siguientes:

1. Conocer las ecuaciones de análisis y de síntesis de la transformada  $z$  y entender su significado.
2. Entender que la transformada  $z$  de una señal digital es una señal analógica (de variable compleja).
3. Entender qué es la región de convergencia de la transformada  $z$ , conocer sus propiedades y saber aplicarlas tanto en el cálculo de la transformada directa como en el de la transformada inversa.
4. Entender qué es el diagrama de polos y ceros de una transformada  $z$ , saber interpretar su significado y saber representarlo gráficamente.
5. Comprender cómo la transformada  $z$  está íntimamente relacionada con la transformada de Laplace mediante el muestreo con tren de deltas de la señal temporal analógica.
6. Conocer las transformadas  $z$  de las señales más típicas en la práctica.
7. Conocer las propiedades de la transformada  $z$  y saber aplicarlas en combinación con las transformadas conocidas de señales básicas para calcular las transformadas de señales más complejas.
8. Conocer y saber aplicar estrategias que permiten resolver fácilmente problemas de cálculo de la transformada  $z$  inversa.
9. Saber qué es la función de transferencia de un sistema LIT digital y entender su significado y su utilidad práctica.
10. Saber caracterizar sistemas LIT digitales mediante su función de transferencia, así como las asociaciones entre sistemas LIT digitales.
11. Saber cómo solucionar ecuaciones en diferencias lineales de coeficientes constantes mediante la transformada  $z$  y saber cómo aplicar esta solución para obtener la respuesta impulsional de sistemas LIT digitales a partir de su relación entrada-salida.

- 12.** Conocer y saber aplicar las herramientas que proporciona MATLAB a fin de simplificar los cálculos requeridos en la caracterización de sistemas LIT digitales mediante la transformada  $z$ .



# 1. Caracterización de señales digitales en el dominio z

En este primer apartado, se presentan e interpretan las ecuaciones que permiten calcular la transformada de z de una señal digital y, en sentido opuesto, obtener la expresión temporal de una señal digital a partir de su transformada z (subapartado 1.1).

A continuación, se introduce el concepto de *región de convergencia* de una transformada z, de gran importancia a la hora de pasar del dominio temporal al dominio transformado z y viceversa (subapartado 1.2). Y, seguidamente, se introduce también el concepto de *diagrama de polos y ceros* de una transformada z, que es de gran utilidad en aplicaciones tanto de análisis como de diseño de sistemas LIT digitales y que constituye la única representación gráfica de señales que nos interesará hacer en el dominio transformado z (subapartado 1.3).

Finalmente, el apartado se cierra con la demostración de la relación existente entre la transformada z y la transformada de Laplace (subapartado 1.4).

## 1.1. La transformada z de señales digitales

Sea  $x[n]$  una señal digital cualquiera. La **transformada de z de  $x[n]$**  es una señal que denotaremos como  $X(z)$ . La notación comúnmente utilizada para expresar la relación entre ambas señales es la siguiente:

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z) \quad (1)$$

allí donde la letra Z simboliza a la transformada de z.

La **ecuación de análisis de la transformada z** es la operación que permite calcular la **transformada z directa**, es decir, es la operación que permite **obtener  $X(z)$  a partir de  $x[n]$** :

$$X(z) = Z\{x[n]\} \triangleq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n} \quad (2)$$

allí donde z es la variable compleja ( $z \in \mathbb{C}$ ) y donde  $X(z)$  es una señal compleja de variable compleja ( $X(z_i) \in \mathbb{C}, \forall z_i \in \mathbb{C}$ ).

En primer lugar, conviene notar y resaltar algo que, de entrada, puede parecer extraño o, en el mejor de los casos, puede no ser muy intuitivo:  $X(z)$  **es una señal analógica**; es decir, la señal  $x[n]$ , que es digital (o sea, de variable entera:  $n \in \mathbb{Z}$ ), se convierte, al ser transformada en  $X(z)$ , en una señal analógica de variable compleja.

En segundo lugar, es muy importante tener siempre presente que, al ser compleja, la variable  $z$  puede ser descompuesta en otras dos variables, correspondientes a su módulo y su fase:

$$z = |z|e^{j\text{Arg}(z)} = re^{j\omega} \quad \begin{cases} |z| = r \\ \text{Arg}(z) = \omega \end{cases} \quad (3)$$

allí donde  $r$  y  $\omega$  son dos variables reales ( $r, \omega \in \mathbb{R}$ ).

Entonces, se observa en (2) que la transformada  $z$  directa implica el cálculo de infinitos productos escalares entre  $x[n]$  y cada una de la señales exponenciales complejas de la familia  $z^n$ . Así,  $X(z)$  está constituida por los resultados de estos infinitos productos escalares:

$$X(z_i) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z_i^{-n} \quad (4)$$

allí donde  $X(z_i)$  es el resultado del producto escalar entre  $x[n]$  y  $z_i^n$ .

Por tanto,  $X(z_i)$  nos da una medida de cuánto se parecen  $x[n]$  y  $z_i^n$ , nos dice cuánto de  $z_i^n$  hay en  $x[n]$ . Y lo hace del mismo modo que el producto escalar entre dos vectores nos dice cuánto de uno hay en el otro, ya que, interpretado en términos geométricos, nos da una medida de la magnitud de la proyección de un vector sobre el otro.

Si nos fijamos, por ejemplo, en el producto escalar entre  $x[n]$  y una señal delta:

$$x[n_i] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\delta[n - n_i] \quad (5)$$

vemos que el significado de la operación es exactamente el mismo:  $x[n_i]$  es la amplitud de  $x[n]$  en  $n = n_i$ , y precisamente esa es la medida de cuánto de  $\delta[n - n_i]$  hay en  $x[n]$ , ya que toda la información contenida en  $\delta[n - n_i]$  está concentrada en el instante  $n = n_i$ .

Así, y puesto que la familia de las señales delta forma base generadora del espacio de las señales digitales, los infinitos productos escalares entre  $x[n]$  y cada uno de los miembros de esta familia de señales nos permiten, como ya sabemos, expresar la señal  $x[n]$  como el resultado de una combinación lineal de señales delta:

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] \delta[n-m] \quad (6)$$

En este caso, se observa que la familia de señales delta es base canónica del espacio de las señales digitales, puesto que los coeficientes de  $x[n]$  expresada en esta base coinciden directamente con sus valores de amplitud; o sea, que  $x[m] = x[n]$ .

Pues bien, como ya sabemos por el teorema de las autofunciones, también las señales exponenciales complejas forman base generadora del espacio de las señales digitales. Por lo tanto, también es posible expresar  $x[n]$  como el resultado de una combinación lineal de señales exponenciales complejas, al estar cada una de ellas multiplicada en dicha combinación lineal por el valor correspondiente de la señal  $X(z)$ :

La **ecuación de síntesis de la transformada z** es la operación que permite calcular la **transformada z inversa**, es decir, es la operación que permite **obtener  $x[n]$  a partir de  $X(z)$** :

$$x[n] = Z^{-1}\{X(z)\} \triangleq \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=r_0} X(z) z^{n-1} dz \quad (7)$$

allí donde  $Z^{-1}$  denota la transformada z inversa.

Respecto de esta ecuación de síntesis de la transformada z, únicamente interesa saber interpretar su significado: permite expresar una señal digital ( $x[n]$ ) como el resultado de una combinación lineal de exponenciales complejas ( $z^n$ ) ponderadas por los valores de la transformada z de dicha señal ( $X(z)$ ). Es fácil ver que, en su interpretación algebraica, el significado de las ecuaciones (6) y (7) es exactamente el mismo, con la única alteración de la base de señales utilizada en cada caso: señales delta en (6) y señales exponenciales complejas en (7).

Además, esta ecuación (7) también nos muestra que **la transformada z es una operación reversible**, es decir, que no se pierde información al pasar de  $x[n]$  a  $X(z)$ , pues, si se perdiese, no sería posible reconstruir  $x[n]$  a partir de  $X(z)$ , que es justamente lo que se hace en (7). Por tanto, esto nos permite concluir lo siguiente:

Una señal  $x[n]$  y su transformada  $z$   $X(z)$  son representadas como dos señales distintas, pero, en realidad, son una y la misma cosa. Podría decirse, incluso, que ambas señales son la misma señal, en la medida en que ambas contienen exactamente la misma información, solo que representada en dominios distintos.

Es en este sentido que calcular la transformada de una señal es lo mismo que aplicarle un cambio de base a un vector: cambia la base de representación y, por tanto, los coeficientes del vector, pero la información contenida en ellos es la misma (o sea, el vector sigue siendo el mismo).

Se trata de algo parecido, si se quiere, a lo que sucede entre la relación entrada-salida de un sistema LIT y su respuesta impulsional; en cierto modo, las dos son una y la misma cosa, puesto que ambas contienen la misma información representada de un modo diferente.

Dicho lo cual, nuestro interés por la ecuación (7) termina exactamente aquí. Nos ahorraremos los detalles acerca de por qué la integral es una integral de línea a lo largo de una circunferencia de radio  $r_0$ , de cuál es el origen del factor  $1/2\pi j$  que multiplica la integral o de a qué se debe que el exponente de la señal exponencial sea en lugar de simplemente  $n$ . Nos basta con saber que se trata de una integral que permite calcular una suma a la largo de la variable  $z$ , que es lo que se requiere para construir una combinación lineal de señales pertenecientes a la familia de las exponenciales complejas de la forma  $z^n$ :  $z_1^n$ ,  $z_2^n$ ,  $z_3^n$ , etc.

Como veremos en los subapartados y apartados siguientes, en la práctica nunca usaremos la ecuación (7) para hacer ningún cálculo. En este sentido, nuestra estrategia consistirá en tomar resultados conocidos de transformadas  $z$  de señales básicas (ver apartado 2 de este mismo módulo) y, mediante la aplicación de las propiedades de la transformada  $z$  (ver apartado 3 de este mismo módulo), calcular las transformadas directas e inversas de señales más complejas.

## 1.2. Región de convergencia de la transformada $z$

Análogamente a lo que sucede con las señales analógicas y la transformada de Laplace, se da la circunstancia de que no todas las señales digitales tienen transformada  $z$ . Esto es debido a que en la ecuación de análisis de la transformada  $z$  se calcula un sumatorio definido entre  $n \rightarrow -\infty$  y  $n \rightarrow +\infty$  que no tiene por qué converger necesariamente. Así, hay señales  $x[n]$  para las que dicho sumatorio no converge. Estas señales no tienen transformada  $z$ , es decir, no son expresables como el resultado de una combinación lineal de exponenciales complejas de la forma  $z^n$ . Ciertamente, en este sentido la base formada por las señales delta tiene mayor potencia expresiva que la formada por señales las exponenciales complejas.

Pero, si nos ocupamos de las señales que sí tienen transformada z, vemos que, en realidad, la convergencia del sumatorio de la ecuación (2) no es «binaria». Es decir, que no se trata de si la suma converge o no (o sea, de si la transformada z de la señal existe o no), si no de **para qué valores de z converge la suma** (o sea, de **para qué valores de z está definida la transformada z de la señal**):

Sean una señal digital  $x[n]$  y su transformada z  $X(z)$ . Se denomina **región de convergencia** (ROC, del inglés, Region of Convergence) de la transformada z de  $x[n]$  a **los valores de z para los cuales  $X(z)$  está definida**; es decir, al conjunto de valores de z para los que converge la suma de la ecuación de análisis de la transformada z aplicada a  $x[n]$ .

Por tanto, y en primer lugar, nunca es correcto afirmar que «la transformada z de  $x[n]$  es  $X(z)$ », sino que «la transformada z de  $x[n]$  es  $X(z)$  con una ROC  $R$ »:

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z), \quad R \quad (8)$$

allí donde  $R$  es la ROC de  $X(z)$ .

En segundo lugar, y muy importante, **la convergencia de la ecuación de análisis de la transformada z depende siempre de  $x[n]$  y de  $|z|$** , pero nunca de  $\text{Arg}(z)$ , puesto que es el módulo de las señales implicadas en la suma lo que determina si dicha suma (que, como sabemos, no es más que una suma a lo largo de  $n$ ) converge o no y, como también sabemos, el módulo de una exponencial compleja de la forma  $e^{j\omega n}$  es siempre igual a 1.

Para ver esto con más en detalle, recuperamos la notación establecida en (3), según la cual  $z = re^{j\omega}$ , y la aplicamos a la ecuación (2):

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n](re^{j\omega})^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]r^{-n}e^{-j\omega n} \quad (9)$$

siendo  $r = |z|$  y  $\omega = \text{Arg}(z)$ .

Así, evaluar si la suma converge, pasa por evaluar si el módulo de  $X(z)$  está o no acotado en amplitud. Para establecer una cota del mismo, basta con aplicar la desigualdad triangular:

$$|X(z)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]r^{-n}e^{-j\omega n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]r^{-n}e^{-j\omega n}| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|r^{-n} \quad (10)$$

puesto que  $r = |z|$  y que, como ya hemos comentado antes,  $|e^{-j\omega n}| = 1$ .

Vemos, por tanto, que la ROC de  $X(z)$  vendrá siempre determinada por  $r$ ; es decir, por  $|z|$ . Por tanto,  $X(z)$  existirá para algunos valores de  $z$  y no existirá para otros. Cuáles sean estos valores dependerá de  $x[n]$ . En concreto, **dependiendo de la naturaleza de  $x[n]$ , la ROC de  $X(z)$  será de un cierto tipo o de otro.**

Por ejemplo, si consideramos el caso en que  $x[n]$  es una señal de longitud finita (que empieza en  $n = n_1$  y acaba en  $n = n_2$ ; por tanto, con  $n_1 \leq n_2$ ) y absolutamente sumable, la ROC de  $X(z)$  abarcará todo posible valor de  $z$  (es decir,  $X(z)$  estará definida para todo valor de  $z$ ), puesto que, aplicando esto a (10):

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]| < \infty \Rightarrow |X(z)| \leq \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]| r^{-n} \quad (11)$$

1) Si  $r \geq 1$ , entonces:

$$|X(z)| \leq \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]| r^{-n} \leq \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]| r^{-n_1} = r^{-n_1} \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]| < \infty \quad (12)$$

2) Si  $r < 1$ , entonces:

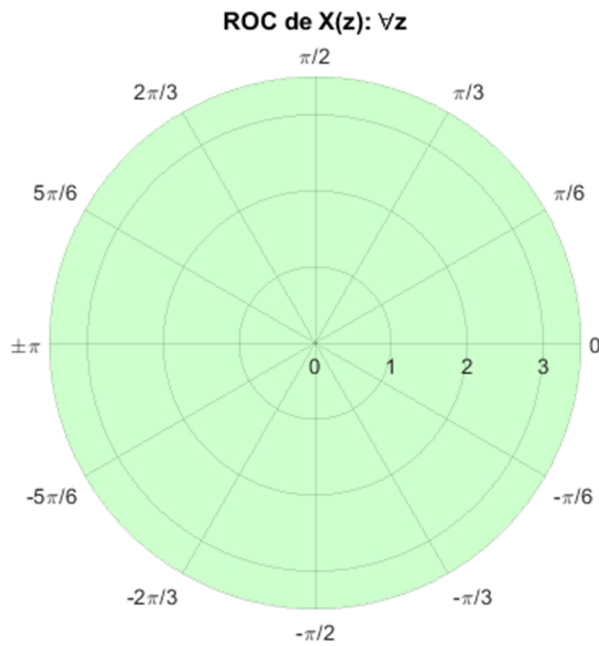
$$|X(z)| \leq \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]| r^{-n} \leq \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]| r^{-n_2} = r^{-n_2} \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]| < \infty \quad (13)$$

Por tanto, si  $x[n]$  es una señal de longitud finita y absolutamente sumable:

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z), \quad \forall z \quad (14)$$

En general, la ROC se representa gráficamente sobre el plano complejo (el plano  $z$ ). Así pues, si  $x[n]$  es de longitud finita y absolutamente sumable, la ROC de  $X(z)$  es todo el plano  $z$ :

Figura 1. Representación gráfica de la ROC de  $X(z)$ :  $x[n]$  es de longitud finita y absolutamente sumable.



Algunos comentarios sobre la representación gráfica de la ROC ilustrada en la figura 1:

- La ROC es la región representada en verde, abarcando todo el plano  $z$ .
- Las circunferencias concéntricas centradas en el origen del plano  $z$  (el punto  $z = 0$ ) son el lugar geométrico de los valores de  $z$  con módulo constante:  $|z| = 1$ ,  $|z| = 2$ ,  $|z| = 3$ , etc.
- Las rectas que nacen en  $z = 0$  y se extienden hacia el infinito son el lugar geométrico de los valores de  $z$  con fase constante:  $\text{Arg}(z) = 0$  rad,  $\text{Arg}(z) = \pi/6$  rad,  $\text{Arg}(z) = 2\pi/6$  rad, etc.
- Por la periodicidad  $2\pi$  de la fase de todo número complejo, cualquier valor de fase puede indicarse tanto con signo positivo como negativo:  $-5\pi/6$  rad  $= 7\pi/6$  rad,  $-2\pi/3$  rad  $= 4\pi/3$  rad, etc. De ahí también que sea indiferente indicar  $\pi$  rad o  $-\pi$  rad, puesto que  $\pi$  rad  $= -\pi$  rad.

Sin embargo, en el caso en que  $x[n]$  no sea una señal de longitud finita, sucede que la definición de la ROC de  $X(z)$  ya no es tan sencilla. A continuación, se propone un pequeño ejercicio a modo de ejemplo que ayudará a entender mejor qué relación hay entre la ROC y la naturaleza de  $x[n]$ .

### Ejemplo 1

Se pide calcular la transformada  $z$  de las siguientes señales digitales:

$$x_1[n] = a^n u[n] \quad (15)$$

$$x_2[n] = a^{-n} u[-n-1] \quad (16)$$

$$x_3[n] = a^n \delta[n] \quad (17)$$

allí donde  $a$  es una constante, en general, compleja ( $a \in \mathbb{C}$ ).

### Solución

a) De entrada, vemos que  $x_1[n]$  es una señal infinita orientada a la derecha. Calculamos su transformada  $z$  aplicando directamente la ecuación de análisis y resolviendo la serie geométrica resultante:

$$X_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{a^n u[n]}{x_1[n]} z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (az^{-1})^n \quad (18)$$

Se observa que se trata de una serie geométrica infinita (hasta  $n = +\infty$ ), la convergencia de la cual solo queda garantizada si la razón de la serie  $(az^{-1})$  es de módulo inferior a 1; es decir, si  $|az^{-1}| < 1$ ; o sea, si  $|a|/|z| < 1$ .

De este modo, sucede lo siguiente:

- Si  $|z| > |a|$ , entonces  $|az^{-1}| < 1$  y la serie converge.
- Si  $|z| \leq |a|$ , entonces  $|az^{-1}| \geq 1$  y la serie diverge.

Por tanto, si  $|z| > |a|$ :

$$X_1(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (az^{-1})^n = \frac{1 - (az^{-1})^{\infty}}{1 - az^{-1}} = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad (19)$$

ya que, siendo  $|az^{-1}| < 1$ , sucede que  $(az^{-1})^{\infty} = 0$ .

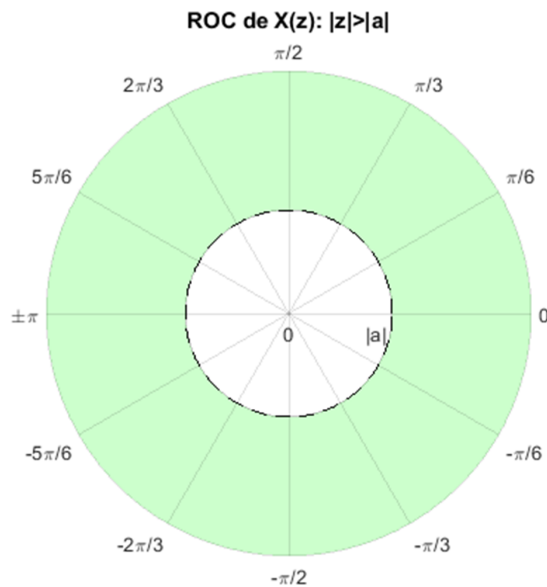
Por lo tanto, la ROC de  $X_1(z)$  es  $|z| > |a|$  y podemos concluir que:

$$\boxed{a^n u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|} \quad (20)$$

Así pues, tal y como se ilustra en la figura 2, la ROC de  $X_1(z)$  puede representarse gráficamente en el plano complejo (el plano  $z$ ): es la región del plano  $z$  que queda fuera de la circunferencia de radio  $|a|$  centrada en el origen; o sea, es el exterior de la circunferencia  $|z| = |a|$ .



Figura 2. Representación gráfica de la ROC de  $X_1(z)$ :  $x_1[n]$  es una señal infinita orientada a la derecha.



b) Ahora, vemos que  $x_2[n]$  es una señal infinita orientada a la izquierda. Análogamente, calculamos su transformada z:

$$X_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{a^{-n} u[-n-1]}_{x_2[n]} z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} (a^{-1} z^{-1})^n \quad (21)$$

Se observa que, en este caso, la razón de la serie geométrica es  $a^{-1} z^{-1}$ . Sin embargo, al ser  $n = -\infty$  el exponente crítico, la condición de convergencia es que la razón de la serie sea de módulo superior a 1; es decir, que  $|a^{-1} z^{-1}| > 1$ ; o sea, que  $|a| |z| < 1$ .

Así pues:

- Si  $|z| < 1/|a|$ , entonces  $|a^{-1} z^{-1}| > 1$  y la serie converge.
- Si  $|z| \geq 1/|a|$ , entonces  $|a^{-1} z^{-1}| \leq 1$  y la serie diverge.

Por tanto, si  $|z| < 1/|a|$ :

$$X_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} (a^{-1} z^{-1})^n = \frac{(a^{-1} z^{-1})^{-\infty} - (a^{-1} z^{-1})^{-1} (a^{-1} z^{-1})}{1 - a^{-1} z^{-1}} = \frac{-1}{1 - a^{-1} z^{-1}} \quad (22)$$

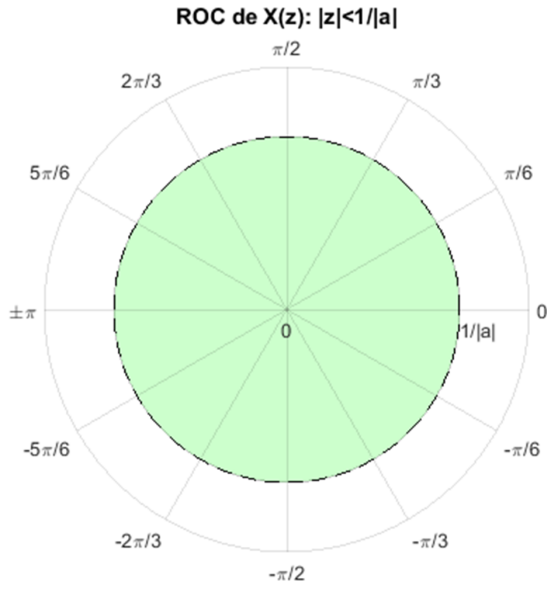
ya que, siendo  $|a^{-1} z^{-1}| > 1$ , sucede que  $(a^{-1} z^{-1})^{-\infty} = 0$ .

Por lo tanto, la ROC de  $X_2(z)$  es  $|z| < 1/|a|$  y podemos concluir que:

$$a^{-n} u[-n-1] \xrightarrow{Z} \frac{-1}{1 - a^{-1} z^{-1}}, \quad |z| < \frac{1}{|a|} \quad (23)$$

Así, tal y como se ilustra en la figura 3, vemos que la ROC de  $X_2(z)$  es la región del plano z que queda dentro de la circunferencia de radio  $1/|a|$  centrada en el origen; o sea, es el interior de la circunferencia  $|z| = 1/|a|$ .

Figura 3. Representación gráfica de la ROC de  $X_2(z)$ :  $x_2[n]$  es una señal infinita orientada a la izquierda.



c) En este caso, se observa que  $x_3[n]$  es una señal infinita orientada a ambos lados. Además, podemos aprovechar hábilmente los resultados de  $X_1(z)$  y  $X_2(z)$  para simplificar el cálculo de  $X_3(z)$ :

$$\begin{aligned}
 X_3(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} = \\
 &= \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} (a^{-1}z^{-1})^n}_{X_2(z)} + \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} (az^{-1})^n}_{X_1(z)} = X_1(z) + X_2(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} - \frac{1}{1-a^{-1}z^{-1}} = \quad (24) \\
 &= \frac{1-a^{-1}z^{-1}-1+az^{-1}}{1-az^{-1}-a^{-1}z^{-1}+z^{-2}} = \frac{(a^2-1)a^{-1}z^{-1}}{1-(a^2+1)a^{-1}z^{-1}+z^{-2}}
 \end{aligned}$$

Sin embargo, en este cálculo de  $X_3(z)$  se han aprovechado los resultados previamente conocidos de  $X_1(z)$  y  $X_2(z)$ , de modo que la ROC de  $X_3(z)$  ha de ser tal que incluya la intersección de las ROC de  $X_1(z)$  y  $X_2(z)$ .

Dicho de otro modo:  $X_3(z)$  está definida para aquellos valores de  $z$  para los que están definidas simultáneamente  $X_1(z)$  y  $X_2(z)$ . Así pues, siendo  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$ , respectivamente, las ROC de  $X_1(z)$ ,  $X_2(z)$  y  $X_3(z)$ , vemos que:

$$R_3 = R_1 \cap R_2 = \{ |z| > |a| \} \cap \left\{ |z| < \frac{1}{|a|} \right\} = |a| < |z| < \frac{1}{|a|} \quad (25)$$

Por tanto, y como conclusión, se nos presentan dos escenarios posibles:

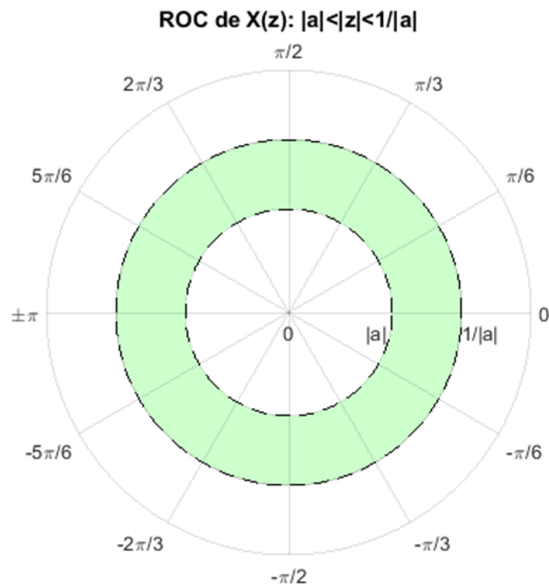
1) Si  $|a| < 1$ , entonces  $X_3(z)$  existe y su ROC es  $|a| < |z| < 1/|a|$ :

$$a^n, \quad \forall |a| < 1 \quad \xleftrightarrow{z} \quad \frac{(a^2-1)a^{-1}z^{-1}}{1-(a^2+1)a^{-1}z^{-1}+z^{-2}}, \quad |a| < |z| < \frac{1}{|a|} \quad (26)$$

En este escenario, la ROC de  $X_3(z)$  es la región del plano  $z$  que queda comprendida entre las circunferencias  $|z|=|a|$  y  $|z|=1/|a|$ ; o sea, es el interior de un anillo de radio interior  $|a|$  y radio exterior  $1/|a|$ , tal y como se muestra en la figura 4.

2) Si  $|a| \geq 1$ , entonces  $X_3(z)$  no existe, puesto que  $R_1 \cap R_2 = \emptyset$ .

Figura 4. Representación gráfica de la ROC de  $X_3(z)$ :  $x_3[n]$  es una señal infinita orientada a ambos lados.



En realidad, los resultados obtenidos en el ejemplo 1 ya permiten cubrir, junto con la transformada  $z$  de la señal finita calculada anteriormente, toda la casuística de posibles tipos de ROC y, por tanto, ilustran muy bien las siguientes conclusiones generales acerca de la relación entre la naturaleza de  $x[n]$  y el tipo de ROC de  $X(z)$ :

Sea  $x[n]$  una señal digital; si existe, sea  $X(z)$  la transformada z de  $x[n]$ ; y sean  $a$  y  $b$  dos constantes complejas arbitrarias ( $a, b \in \mathbb{C}$ ) tales que  $|a| < |b|$ .

Solo puede darse uno de los siguientes casos:

1) La señal  $x[n]$  **no tiene transformada z**; es decir,  $X(z)$  no existe para ningún valor de  $z$ .

2) La señal  $x[n]$  es **finita** y la ROC de  $X(z)$  es **todo el plano z**:

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z), \quad \forall z \quad (27)$$

3) La señal  $x[n]$  es **infinita orientada a la derecha** y la ROC de  $X(z)$  es el **exterior de una circunferencia centrada en el origen del plano z**:

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z), \quad |z| > |a| \quad (28)$$

4) La señal  $x[n]$  es **infinita orientada a la izquierda** y la ROC de  $X(z)$  es el **interior de una circunferencia centrada en el origen del plano z**:

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z), \quad |z| < |a| \quad (29)$$

5) La señal  $x[n]$  es **infinita orientada a ambos lados** y la ROC de  $X(z)$  es el **interior de un anillo centrado en el origen del plano z**:

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z), \quad |a| < |z| < |b| \quad (30)$$

### 1.3. Diagrama de polos y ceros de la transformada z

En general, no nos vamos a detener a comentar cómo representar gráficamente señales en el dominio transformado  $z$ , pues es algo que no vamos a necesitar en ningún caso. Nos basta con tener claro que  $X(z)$  es una señal compleja de variable compleja y que, por tanto, su representación gráfica daría lugar a dos gráficas tridimensionales de dos señales reales representadas sobre el plano complejo, el plano  $z$ :

- Una gráfica para su señal módulo  $|X(z)|$ , que es una señal real de variable compleja:  $|X(z)| \in \mathbb{R}, \forall z_i \in \mathbb{C}$ .
- Y otra gráfica para su señal fase  $\text{Arg}(X(z))$ , que también es una señal real de variable compleja:  $\text{Arg}(X(z)) \in \mathbb{R}, \forall z_i \in \mathbb{C}$ .

Sin embargo, ya hemos visto que la representación gráfica de la ROC de  $X(z)$  tiene su interés. En este sentido, hay otro aspecto de la naturaleza de  $X(z)$  que está muy relacionado con la ROC y cuya representación gráfica es de gran utilidad: el «diagrama de polos y ceros» de  $X(z)$ .

Sea  $x[n]$  una señal analógica y sea  $X(z)$  su transformada z.

Un **cero de  $X(z)$**  es **todo valor de  $z$  para el que la expresión de  $X(z)$  es igual a 0**:

$$\text{Ceros de } X(z) = \{c_i: \forall c_i \in \mathbb{C}, X(c_i) = 0\} \quad (31)$$

allí donde  $c_i$  es el cero  $i$ -ésimo de  $X(z)$ .

Un **polo de  $X(z)$**  es **todo valor de  $z$  para el que la expresión de  $X(z)$  tiende a infinito**:

$$\text{Polos de } X(z) = \{p_i: \forall p_i \in \mathbb{C}, X(p_i) \rightarrow \infty\} \quad (32)$$

allí donde  $p_i$  es el polo  $i$ -ésimo de  $X(z)$ .

El **diagrama de polos y ceros de  $X(z)$**  es una **representación gráfica sobre el plano z de los polos y los ceros de  $X(z)$** , en la cual:

- La ubicación de un cero en el plano z se simboliza mediante un círculo ( $\circ$ ).
- La coincidencia de dos o más ceros en la misma ubicación ( $c_i = c_j$ , con  $i \neq j$ ) se simboliza mediante un superíndice añadido al círculo ( $\circ^2, \circ^3, \dots, \circ^N$ ).
- La ubicación de un polo en el plano z se simboliza mediante una cruz ( $\times$ ).
- La coincidencia de dos o más polos en la misma ubicación ( $p_i = p_j$ , con  $i \neq j$ ) se simboliza mediante un superíndice añadido a la cruz ( $\times^2, \times^3, \dots, \times^N$ ).

A fin de ilustrar más adecuadamente esta cuestión, tomemos, por ejemplo, la transformada z obtenida en la ecuación (20) del ejemplo 1, calculemos sus ceros y sus polos y representemos gráficamente su diagrama de polos y ceros:

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a| \quad (33)$$

Al tratarse de una señal racional (es decir, constituida por el cociente entre un numerador y un denominador), el cálculo de los polos y ceros de  $X(z)$  pasa por evaluar los valores de  $z$  que o bien anulan o bien hacen tender a infinito al numerador, por un lado, y al denominador, por el otro (ver más detalles sobre esta cuestión en el apartado 4 de este mismo módulo).

Así pues:

- Un cero de una  $X(z)$  racional se corresponde o bien con un cero del numerador o bien con un valor de  $z$  para el que el denominador tienda a infinito.
- Un polo de una  $X(z)$  racional se corresponde o bien con un cero del denominador o bien con un valor de  $z$  para el que el numerador tienda a infinito.

Entonces, en el caso de la transformada  $z$  de la ecuación (33), aunque no hay ningún valor de  $z$  que anule el numerador,  $X(z)$  sí presenta un cero y está ubicado el origen (si  $z = 0$ , entonces el denominador tiende a infinito y, por tanto,  $X(0) = 0$ ):

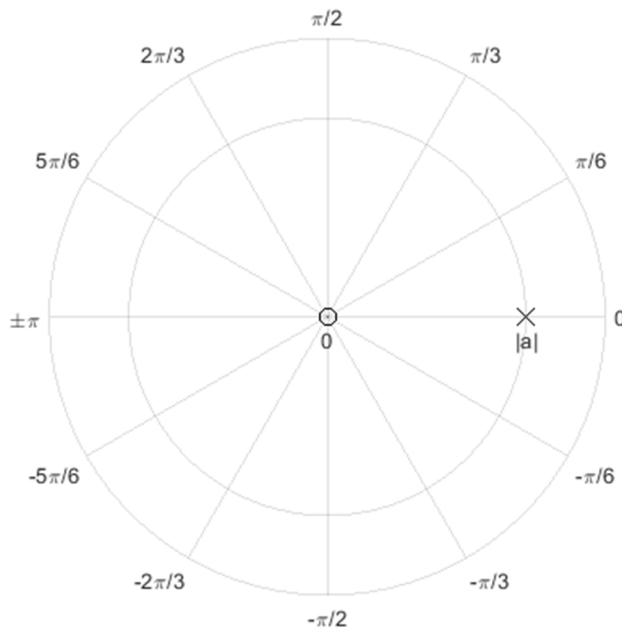
$$z = 0 \Rightarrow z^{-1} \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{1 - az^{-1}} = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \quad (34)$$

Y, respecto de los polos, vemos que  $X(z)$  presenta un único polo en  $z = a$  (para este valor, el denominador se anula y, por tanto,  $X(a) \rightarrow 0$ ), el cual **está justamente situado sobre la circunferencia frontera que delimita la ROC de  $X(z)$** :

$$z = a \Rightarrow az^{-1} = 1 \Rightarrow 1 - az^{-1} = 0 \Rightarrow \frac{1}{1 - az^{-1}} \rightarrow \infty \Rightarrow p_1 = a \quad (35)$$

Por tanto, el diagrama de polos y ceros de  $X(z)$  incluye un cero en  $z = 0$  y un polo en  $z = a$  (para la representación gráfica, se asume arbitrariamente que  $a \in \mathbb{R}$  con  $a > 0$ ; o sea, se asume una constante real positiva, de modo tal que  $|a| = a$  y  $\text{Arg}(a) = 0$ ):

Figura 5. Diagrama de polos y ceros con un cero en  $z = 0$  y un polo en  $z = a$  (siendo  $a \in \mathbb{R}$ , con  $a > 0$ )



Calculemos ahora, también a modo de ejemplo, la transformada z de la señal resultante del producto de una señal coseno por un escalón unitario:

$$\begin{aligned}
 X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos(\omega_0 n) u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \cos(\omega_0 n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}}{2} z^{-n} \\
 &= \frac{1}{2} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{j\omega_0} z^{-1})^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-j\omega_0} z^{-1})^n \right) \Big|_{|z|>1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1 - e^{j\omega_0} z^{-1}} + \frac{1}{1 - e^{-j\omega_0} z^{-1}} \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1 - e^{-j\omega_0} z^{-1} + 1 - e^{j\omega_0} z^{-1}}{(1 - e^{j\omega_0} z^{-1})(1 - e^{-j\omega_0} z^{-1})} = \frac{1}{2} \frac{2 - (e^{j\omega_0} + e^{-j\omega_0}) z^{-1}}{1 - (e^{j\omega_0} + e^{-j\omega_0}) z^{-1} + z^{-2}} = \\
 &= \frac{1 - \cos(\omega_0) z^{-1}}{1 - 2\cos(\omega_0) z^{-1} + z^{-2}}
 \end{aligned} \tag{36}$$

Por tanto, la ROC de  $X_2(z)$  es  $|z| > 1$  y podemos concluir que:

$$\cos(\omega_0 n) u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1 - \cos(\omega_0) z^{-1}}{1 - 2\cos(\omega_0) z^{-1} + z^{-2}}, \quad |z| > 1 \tag{37}$$

En este caso, vemos que  $X(z)$  presenta un cero en  $z = \cos(\omega_0)$ , que es el único valor de  $z$  que anula el numerador:

$$z = \cos(\omega_0) \Rightarrow \cos(\omega_0) z^{-1} = 0 \Rightarrow \frac{1 - \cos(\omega_0) z^{-1}}{1 - 2\cos(\omega_0) z^{-1} + z^{-2}} = 0 \Rightarrow c_1 = \cos(\omega_0) \tag{38}$$

Además,  $X(z)$  presenta otro cero ubicado en el origen. Se observa que, para  $z = 0$ , tienden a infinito tanto el numerador como el denominador:

$$z = 0 \Rightarrow z^{-1} \rightarrow \infty \Rightarrow \begin{cases} 1 - \cos(\omega_0)z^{-1} = 0 \\ 1 - 2\cos(\omega_0)z^{-1} + z^{-2} = 0 \end{cases} \quad (39)$$

Sin embargo, sucede que el numerador (al ser un polinomio de orden 1) estaría provocando un polo de  $X(z)$  en  $z = 0$ , mientras que el denominador (al ser un polinomio de orden 2) estaría provocando dos ceros de  $X(z)$  en  $z = 0$  (pues tanto el factor  $1 - e^{j\omega_0}z^{-1}$  como el factor  $1 - e^{-j\omega_0}z^{-1}$  tienden a infinito para  $z = 0$ ). De este modo, el polo provocado por el numerador en  $z = 0$  se anula con uno de los dos ceros provocados por el denominador también en  $z = 0$ . Y así, como conclusión, queda un único cero de  $X(z)$  en  $z = 0$ :

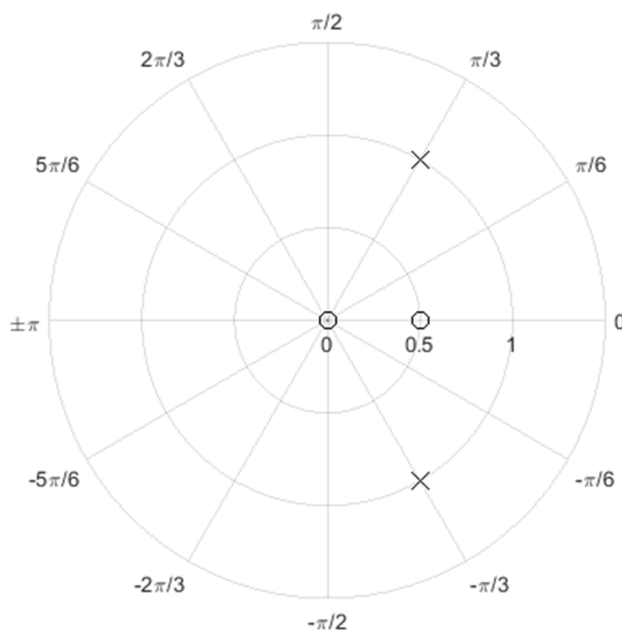
$$z = 0 \Rightarrow z^{-1} \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1 - \cos(\omega_0)z^{-1}}{1 - 2\cos(\omega_0)z^{-1} + z^{-2}} = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \quad (40)$$

Y, respecto de los polos, vemos que  $X(z)$  presenta dos polos ubicados en  $z = e^{j\omega_0}$  y  $z = e^{-j\omega_0}$  (que son los valores de  $z$  para los que se anula el denominador), los cuales, de nuevo, **están justamente situados sobre la recta frontera que delimita la ROC**:

$$z = e^{\pm j\omega_0} \Rightarrow \begin{cases} 1 - e^{j\omega_0}z^{-1} = 0 \\ 1 - e^{-j\omega_0}z^{-1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1 - \cos(\omega_0)z^{-1}}{1 - 2\cos(\omega_0)z^{-1} + z^{-2}} \rightarrow \infty \Rightarrow \begin{cases} p_1 = e^{j\omega_0} \\ p_2 = e^{-j\omega_0} \end{cases} \quad (41)$$

Por tanto, el diagrama de polos y ceros de  $X(z)$  es el siguiente (para la representación gráfica, se asume arbitrariamente que  $\omega_0 = \pi/3$ ):

Figura 6. Diagrama de polos y ceros con dos ceros en  $z = 0$  y  $z = 1/2$  y dos polos en  $z = e^{j\pi/3}$  y  $z = e^{-j\pi/3}$





Así las cosas, es importante tener siempre muy presente que la ROC de una transformada  $z$  y los ceros y los polos de la misma son dos cosas íntimamente relacionadas entre sí. Es debido a que, por lo general, lo verdaderamente interesante consiste en hacer **la representación gráfica conjunta del diagrama de polos y ceros y la ROC**. De este modo, toda la información relevante acerca de las condiciones de existencia de la transformada y de los valores singulares de la expresión de la misma queda representada de forma compacta y en su totalidad en una única gráfica.

En este sentido, a continuación se muestran en la figura 7 y en la figura 8 las ROC de las transformadas  $z$  que acabamos de calcular en (33) y (37), junto con sus ceros y sus polos, respectivamente.

Figura 7. ROC de la transformada  $z$  de una señal infinita orientada a la derecha que presenta un cero en  $z = 0$  y un polo en  $z = a$  (siendo  $a \in \mathbb{R}$ , con  $a > 0$ )

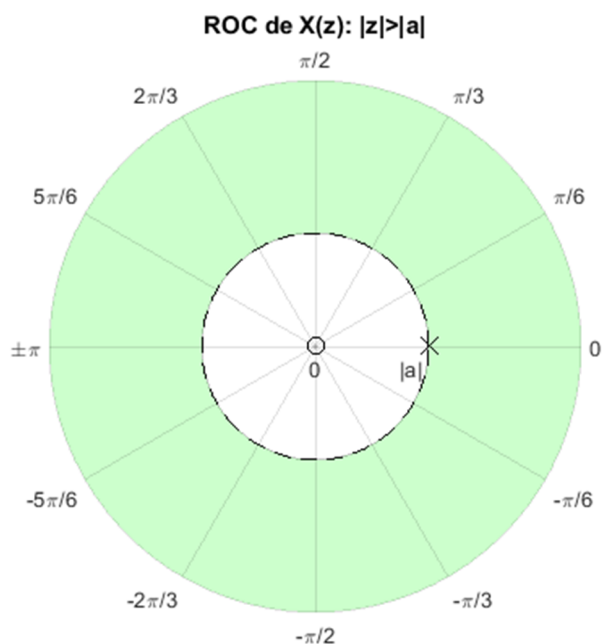
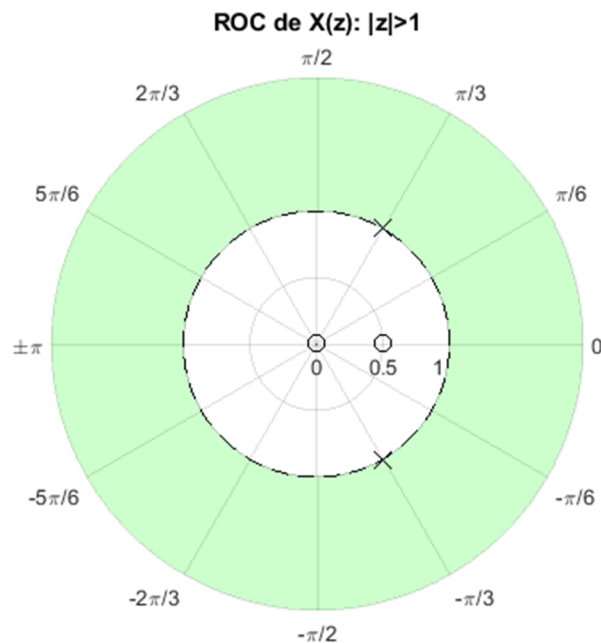


Figura 8. ROC de la transformada z de una señal infinita orientada a la derecha que presenta dos ceros en  $z = 0$  y  $z = 1/2$  y dos polos en  $z = e^{j\pi/3}$  y  $z = e^{-j\pi/3}$



Estos dos ejemplos que acabamos de ver ilustran bien algunos conceptos que hay que tener en cuenta siempre que se calcula una transformada z:

- Que un cero sea un punto en el que la expresión de la transformada sea igual a 0 no quiere decir que los ceros de una transformada pertenezcan a su ROC (como puede verse claramente en la figura 8).
- Muy posiblemente, habrá uno o más polos situados en las circunferencias frontera que delimitan la ROC. En todo caso, **es seguro que nunca habrá polos en el interior de la ROC**, puesto que, por definición, un polo es un punto en el que la expresión de la transformada tiende a infinito (es decir, en el que la transformada no converge).
- En general, una vez calculada la transformada, **conviene siempre comprobar si los valores particulares  $z = 0$  y  $z \rightarrow \infty$  pertenecen o no pertenecen (típicamente, por ser polos) a la ROC.**

### 1.4. Relación entre la transformada z y la transformada de Laplace

Sea  $x[n]$  una señal digital arbitraria resultante del muestreo uniforme de una señal analógica  $x(t)$ :

$$x[n] = x(nT_m) \quad (42)$$

allí donde  $T_m$  es el periodo de muestreo expresado en segundos.

La transformada z de  $x[n]$  no es más que la transformada de Laplace de la señal resultante del muestro de  $x(t)$  mediante un tren de deltas de periodo  $T_m$  (ver demostración 1):

$$Z\{x[n]\} = L\left\{x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_m)\right\} \quad (43)$$

allí donde la relación entre las variables  $s$  y  $z$  viene también determinada por el periodo de muestreo:

$$z = e^{sT_m} \quad (44)$$

Así, la ROC de  $Z\{x[n]\}$  se deriva también de la ROC de  $L\left\{x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_m)\right\}$ , a partir de un mapeo entre los planos  $s$  y  $z$  regido por la relación establecida entre ambas variables en (44).

#### Demostración 1

Calculamos directamente la transformada de Laplace del muestreo de  $x(t)$  por el tren de deltas y, desarrollando la integral resultante e identificando términos aplicando las ecuaciones (42) y (44), vemos que es ya directamente igual a la transformada z de  $x[n]$ :

$$\begin{aligned} L\left\{x(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_m)\right\} &= L\left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t) \delta(t - nT_m)\right\} = \\ L\left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_m) \delta(t - nT_m)\right\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_m) \delta(t - nT_m)\right) e^{-st} dt = \\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_m) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} \delta(t - nT_m) dt &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_m) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-snT_m} \delta(t - nT_m) dt = \\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{x(nT_m)}_{x[n]} \underbrace{e^{-snT_m}}_{z^{-n}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_m) dt}_1 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} = Z\{x[n]\} \end{aligned} \quad (45)$$

## 2. Transformadas z de señales analógicas típicas

En este apartado, se proporcionan las transformadas z de todo un conjunto de señales típicas, muy básicas y, por lo general, de uso muy habitual en la práctica. Además de para conocer toda una serie de señales transformadas elementales, de lo que se trata en realidad es de poder usar sin más, sin tener que volver a calcularlas, todas estas transformadas básicas a fin de calcular transformadas z, tanto directas como inversas, de señales de mayor complejidad que puedan ser descompuestas combinando estas señales más básicas que aquí se presentan (ver apartados 4 y 5 de este mismo módulo).

A tal efecto, al final de este apartado, en el subapartado 2.7, se proporciona una tabla de resumen de todas estas transformadas, para poder consultarla rápidamente cuando se requiera.

### 2.1. Señal delta discreta

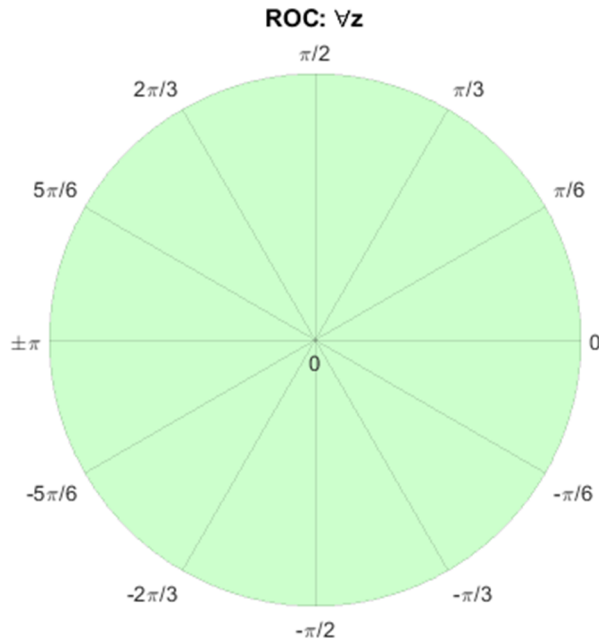
La delta discreta es una señal finita, de modo que la ROC de su transformada z será todo el plano z ( $\forall z$ ). Partiendo de la ecuación de análisis definida en (2), vemos que:

$$Z\{\delta[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n]z^{-0} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n] = 1 \quad (46)$$

Por tanto:

**La transformada z de la señal delta discreta es una señal constante de amplitud 1, cuya ROC abarca todo el plano z:**

$$\boxed{\delta[n] \xleftrightarrow{Z} 1, \quad \forall z} \quad (47)$$

Figura 9. ROC de  $Z\{\delta[n]\}$ 

Es interesante añadir a este resultado el de la transformada z de la señal delta discreta desplazada  $n_0$  muestras, el cual, de hecho, viene a ser una generalización del resultado anterior, ya que  $\delta[n - n_0] = \delta[n]$  para  $n_0 = 0$ :

$$Z\{\delta[n - n_0]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n - n_0] z^{-n} = z^{-n_0} \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n - n_0]}_1 = z^{-n_0} \quad (48)$$

allí donde  $n_0 \in \mathbb{Z}$ .

Se observa que, al tratarse  $\delta[n - n_0]$  de una señal finita, la ROC de su transformada z abarca todo el plano z, con una salvedad importante:

- Si  $n_0 = 0$ , entonces  $z^{-n_0} = 1$  y, como ya se ha visto en (47), la ROC es todo el plano z.
- Si  $n_0 > 0$ , entonces  $z^{-n_0}$  tiende a infinito para  $z = 0$ , de modo que  $z = 0$  queda fuera de la ROC: la transformada presenta  $n_0$  polos en  $z = 0$  (y  $n_0$  ceros en  $z \rightarrow \infty$ ).
- Si  $n_0 < 0$ , entonces  $z^{-n_0}$  tiende a infinito para  $z \rightarrow \infty$ , de modo que  $z \rightarrow \infty$  queda fuera de la ROC: la transformada presenta  $n_0$  polos en  $z \rightarrow \infty$  (y  $n_0$  ceros en  $z = 0$ ).

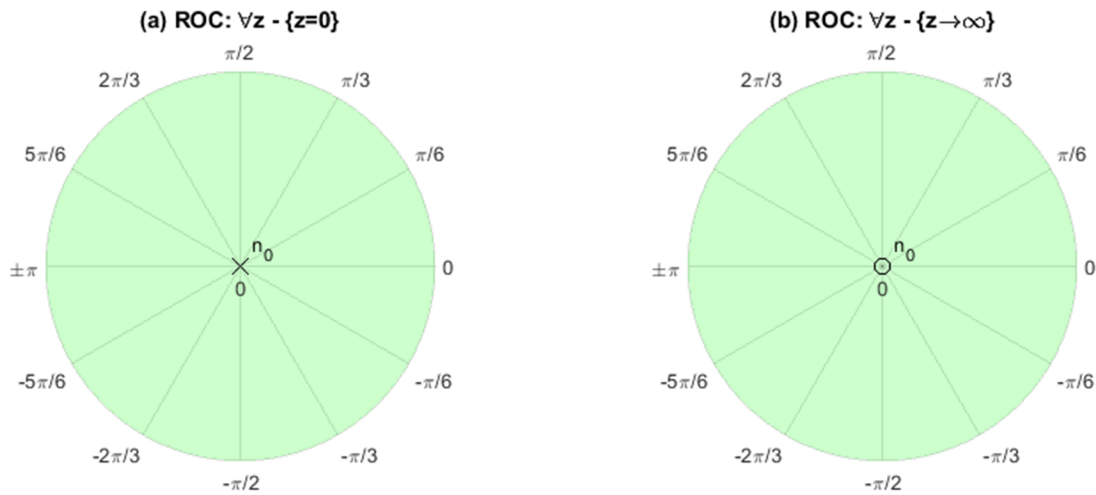
Por tanto:

La transformada z de la señal delta discreta desplazada  $m$  muestras es  $z^{-n_0}$ , cuya ROC abarca todo el plano z, salvo  $z = 0$  o  $z \rightarrow \infty$ , dependiendo de si el valor de  $n_0$  es positivo (delta discreta atrasada  $n_0$  muestras) o negativo (delta discreta adelantada  $n_0$  muestras), respectivamente:

$$\boxed{\delta[n - n_0] \xleftrightarrow{Z} z^{-n_0}, \quad \forall z - \begin{cases} z = 0 & \text{si } n_0 > 0 \\ z \rightarrow \infty & \text{si } n_0 < 0 \end{cases}} \quad (49)$$

allí donde  $m \in \mathbb{Z}$ .

Figura 10. (a) ROC de  $Z\{\delta[n - n_0]\}$ , si  $n_0 > 0$ . (b) ROC de  $Z\{\delta[n - n_0]\}$ , si  $n_0 < 0$ . La primera transformada tiene  $n_0$  polos en  $z = 0$  (y  $n_0$  ceros en  $z \rightarrow \infty$ ) y la segunda tiene  $n_0$  ceros en  $z = 0$  (y  $n_0$  polos en  $z \rightarrow \infty$ ).



## 2.2. Señal escalón unitario

El escalón unitario es una señal infinita orientada a la derecha, de modo que la ROC de su transformada z es el exterior de la circunferencia  $|z| = 1$ :

$$Z\{u[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (z^{-1})^n = \frac{1-0}{1-z^{-1}} = \frac{1}{1-z^{-1}} \quad (50)$$

A continuación, se observa lo siguiente: la expresión de la señal resultante de la transformada z de  $u[n]$  es la misma que la de  $-u[-n-1]$ . La diferencia entre ambas está en la ROC, ya que, por ser una señal infinita orientada a la izquierda, la ROC de la transformada z de  $-u[-n-1]$  es el interior de la circunferencia  $|z| = 1$ :

$$Z\{-u[-n-1]\} = - \sum_{n=-\infty}^{-1} (z^{-1})^n = - \frac{\overbrace{0-z \cdot z^{-1}}^{\text{si } |z|<1}}{1-z^{-1}} = \frac{1}{1-z^{-1}} \quad (51)$$

Por tanto:

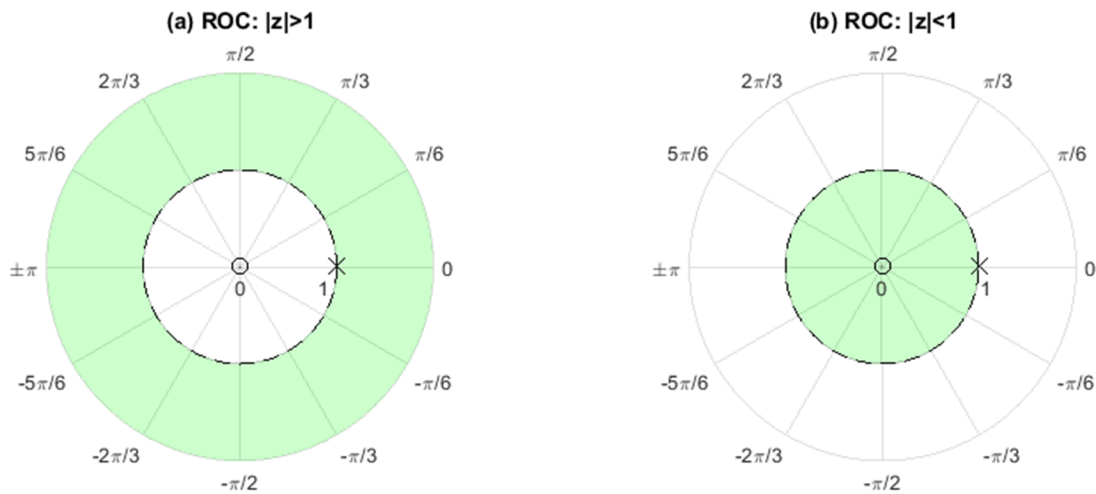
La transformada z de la señal escalón unitario es el inverso de  $1-z^{-1}$  y su ROC abarca los valores de z de módulo superior a 1:

$$u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1-z^{-1}}, \quad |z| > 1 \quad (52)$$

La transformada z de la señal escalón unitario reflejada horizontalmente, adelantada una muestra y cambiada de signo es el inverso de  $1-z^{-1}$  y su ROC abarca los valores de z de módulo inferior a 1:

$$-u[-n-1] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1-z^{-1}}, \quad |z| < 1 \quad (53)$$

Figura 11. (a) ROC de  $Z\{u[n]\}$ . (b) ROC de  $Z\{-u[-n-1]\}$ . Ambas tienen un polo en  $z = 1$  y un cero en  $z = 0$ .



### 2.3. Producto de señal exponencial por escalón unitario

Tomemos ahora una señal de la forma escalón unitario multiplicado por una exponencial:

$$x[n] = a^n u[n] \quad (54)$$

allí donde  $a$  es una constante, en general, compleja ( $a \in \mathbb{C}$ ).

De hecho, la transformada z de esta señal ya la conocemos; en concreto, la tenemos calculada en las ecuaciones (18)-(20) del ejemplo 1 del subapartado 1.2 de este mismo módulo:

$$Z\{a^n u[n]\} = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad (55)$$

donde la ROC de la señal transformada es  $|z| > |a|$ .

Y ahora, como en el apartado anterior, consideramos también la versión orientada a la izquierda, desplazada una muestra y cambiada de signo de la señal definida en (54):

$$x[n] = -a^n u[-n-1] \quad (56)$$

Vemos que, de nuevo, la expresión de la transformada z resultante es la misma y que la única diferencia entre ambas estriba en su ROC:

$$\begin{aligned} Z\{-a^n u[-n-1]\} &= - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[-n-1] z^{-n} = - \sum_{n=-\infty}^{-1} (az^{-1})^n = \\ &\quad \text{si } |z| < |a| \\ &= - \frac{0 - a^{-1} z a z^{-1}}{1 - az^{-1}} = \frac{1}{1 - az^{-1}} \end{aligned} \quad (57)$$

Por tanto:

**La transformada z del producto de  $a^n$  por un escalón unitario es el inverso de  $1 - az^{-1}$  y su ROC abarca los valores de z de módulo superior a  $|a|$ :**

$$\boxed{a^n u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|} \quad (58)$$

allí donde  $a \in \mathbb{R}$ .

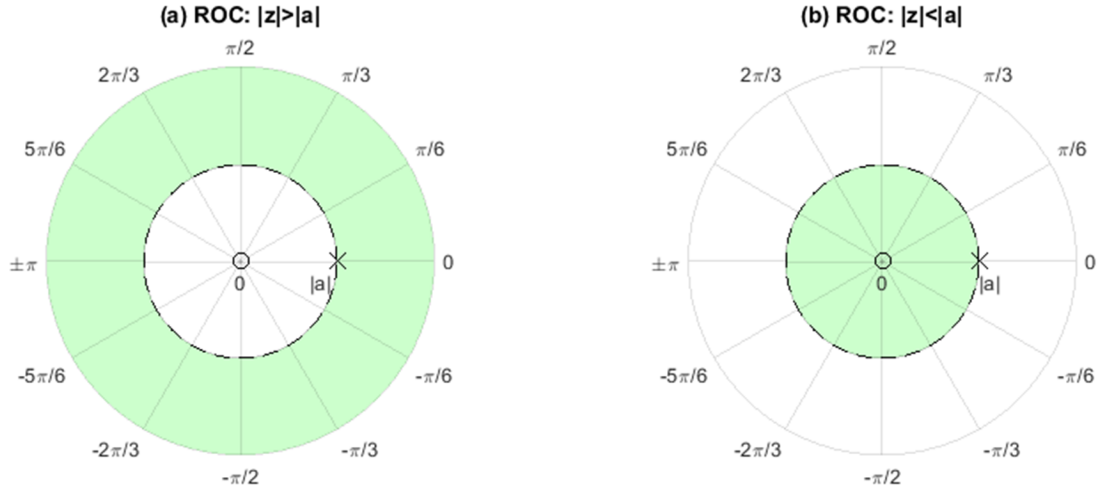
**La transformada z del producto de  $a^n$  por un escalón unitario, reflejado horizontalmente, adelantado una muestra y cambiado de signo, es el inverso de  $1 - az^{-1}$  y su ROC abarca los valores de z de módulo inferior a  $|a|$ :**

$$\boxed{-a^n u[-n-1] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| < |a|} \quad (59)$$

allí donde  $a \in \mathbb{R}$ .



Figura 12. (a) ROC de  $L\{a^n u[n]\}$ . (b) ROC de  $L\{-a^n u[-n-1]\}$ . Ambas tienen un polo en  $z = a$  (al representar el polo, se ha asumido arbitrariamente una constante real positiva:  $|a| = a$  y  $\text{Arg}(a) = 0$ ) y un cero en  $z = 0$ .



## 2.4. Producto de polinomio por señal exponencial por escalón unitario

Multipliquemos ahora las señales definidas en (54) y (56) por un polinomio en  $n$  de orden  $p$ :

$$x_1[n] = \binom{n+p}{p} a^n u[n] \quad (60)$$

$$x_2[n] = -\binom{n+p}{p} a^n u[-n-1] \quad (61)$$

allí donde  $a \in \mathbb{C}$  y donde  $p$  es una constante entera positiva ( $p \in \mathbb{Z}$ , con  $p \geq 1$ ). Cabe destacar que el coeficiente binomial de  $n+p$  sobre  $p$  da lugar a un polinomio de orden  $p$ :

$$\binom{n+p}{p} = \frac{(n+p)!}{p!n!} = \frac{1}{p!} (n+p)(n+p-1)(n+p-2) \cdots (n+2)(n+1) \quad (62)$$

de modo tal que las señales definidas en (60) y (61) quedan como sigue:

1) Si  $p = 1$ :

$$x_1[n] = (n+1)a^n u[n] \quad (63)$$

$$x_2[n] = -(n+1)a^n u[-n-1] \quad (64)$$

2) Si  $p = 2$ :

$$x_1[n] = \frac{1}{2!}(n+2)(n+1)a^n u[n] = \frac{1}{2}(n^2 + 3n + 2)a^n u[n] \quad (65)$$

$$x_2[n] = -\frac{1}{2!}(n+2)(n+1)a^n u[-n-1] = -\frac{1}{2}(n^2 + 3n + 2)a^n u[n] \quad (66)$$

3) Si  $p = 3$ :

$$x_1[n] = \frac{1}{6}(n^3 + 6n^2 + 11n + 6)a^n u[n] \quad (67)$$

$$x_2[n] = -\frac{1}{6}(n^3 + 6n^2 + 11n + 6)a^n u[n] \quad (68)$$

y así sucesivamente.

Entonces, en lugar de abordar directamente el cálculo de la expresión genérica (es decir, en función de  $z$ ) de la transformada  $z$  de las señales definidas en (60) y (61), lo que vamos a hacer es demostrarlo por inducción. A tal efecto, seguiremos los tres pasos siguientes:

- 1) Calculamos la transformada  $z$  para el caso inicial  $p = 1$ .
- 2) Establecemos la hipótesis de inducción para el caso genérico en función de  $p$ , generalizando el resultado obtenido en el paso 1.
- 3) Aceptando la hipótesis de inducción para  $p$  establecida en el paso 2, calculamos la transformada  $z$  para el caso  $p + 1$ : si el resultado obtenido encaja con la hipótesis de inducción, el resultado genérico en función de  $p$  establecido en el paso 2 queda demostrado.

Así pues, en primer lugar, para el caso inicial ( $p = 1$ ) de la señal definida en (60), calculamos la transformada  $z$  de la señal de la ecuación (63):

$$Z\{(n+1)a^n u[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (n+1)a^n u[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(az^{-1})^n = S \quad (69)$$

A continuación, y a partir de (69), desarrollamos la serie  $S$  y también la serie  $(az^{-1})S$ :

$$\begin{aligned} S &= (az^{-1})^0 + 2(az^{-1})^1 + 3(az^{-1})^2 + 4(az^{-1})^3 + 5(az^{-1})^4 + \dots \\ (az^{-1})S &= (az^{-1})^1 + 2(az^{-1})^2 + 3(az^{-1})^3 + 4(az^{-1})^4 + 5(az^{-1})^5 + \dots \end{aligned} \quad (70)$$

Tras lo cual, restamos ambas series, con lo que obtenemos una fórmula de cálculo de  $Z\{(n+1)a^n u[n]\}$  en función de las series  $S$  y  $(az^{-1})S$  desarrolladas en (70):

$$S - (az^{-1})S = (1 - az^{-1})S \Rightarrow S = \frac{S - (az^{-1})S}{1 - az^{-1}} = Z\{(n+1)a^n u[n]\} \quad (71)$$

Y, para acabar el cálculo, obtenemos la expresión final de la transformada:

$$\begin{aligned} Z\{(n+1)a^n u[n]\} &= \frac{(az^{-1})^0 + (az^{-1})^1 + (az^{-1})^2 + (az^{-1})^3 + (az^{-1})^4 + \dots}{1 - az^{-1}} = \\ &= \frac{1 + az^{-1} + (az^{-1})^2 + (az^{-1})^3 + (az^{-1})^4 + \dots}{1 - az^{-1}} = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} \right) \frac{1}{1 - az^{-1}} = \\ &\quad \text{si } |z| > |a| \quad \frac{1}{1 - az^{-1}} \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{1}{(1 - az^{-1})^2} \end{aligned} \quad (72)$$

Por tanto, la transformada z para el caso inicial  $p = 1$  es la siguiente:

$$(n+1)a^n u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{(1 - az^{-1})^2}, \quad |z| > |a| \quad (73)$$

Ahora, y en segundo lugar, establecemos la hipótesis de inducción, generalizando este resultado obtenido en el caso inicial para el caso genérico en función de  $p$ :

$$\binom{n+p}{p} a^n u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{(1 - az^{-1})^{p+1}}, \quad |z| > |a| \quad (74)$$

Finalmente, y en tercer lugar, calculamos la transformada z para el caso  $p + 1$ , asumiendo que la hipótesis de inducción establecida en (74) es cierta:

$$\begin{aligned} Z\left\{\binom{n+p+1}{p+1} a^n u[n]\right\} &= Z\left\{\frac{n+p+1}{p+1} \underbrace{\binom{n+p}{p} a^n u[n]}_{x_1[n]}\right\} = Z\left\{\frac{n+p+1}{p+1} x_1[n]\right\} = \\ &= \frac{1}{p+1} (Z\{n x_1[n]\} + Z\{p x_1[n]\} + Z\{x_1[n]\}) \end{aligned} \quad (75)$$

Entonces, la transformada  $Z\{x_1[n]\}$  es justamente la hipótesis de inducción definida en (74):

$$Z\{x_1[n]\} = Z\left\{\binom{n+p}{p} a^n u[n]\right\} = \frac{1}{(1 - az^{-1})^{p+1}} \quad (76)$$

cuya ROC asociada es  $|z| > |a|$  (condición de convergencia de la hipótesis de inducción).

La transformada  $Z\{p x_1[n]\}$  se obtiene trivialmente aplicando también la hipótesis de inducción:

$$Z\{px_1[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} px_1[n]z^{-n} = p \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1[n]z^{-n}}_{Z\{x_1[n]\}} = \frac{p}{(1-az^{-1})^{p+1}} \quad (77)$$

cuya ROC asociada es  $|z| > |a|$  (condición de convergencia de la hipótesis de inducción).

Y la transformada  $Z\{nx_1[n]\}$  se obtiene un poco más laboriosamente, aplicando también la hipótesis de inducción:

$$\begin{aligned} Z\{nx_1[n]\} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} nx_1[n]z^{-n} = -z \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1[n](-nz^{-n-1}) = -z \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1[n] \frac{dz^{-n}}{dz} = \\ &= -z \frac{d}{dz} \left( \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1[n]z^{-n}}_{Z\{x_1[n]\}} \right) = -z \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{(1-az^{-1})^{p+1}} \right) = -z \frac{-(p+1)az^{-2}}{(1-az^{-1})^{p+2}} = \\ &= \frac{(p+1)az^{-1}}{(1-az^{-1})^{p+2}} \end{aligned} \quad (78)$$

cuya ROC asociada es  $|z| > |a|$  (condición de convergencia de la hipótesis de inducción).

Finalmente, volvemos a (75) y aplicamos los resultados obtenidos en (76)-(78):

$$\begin{aligned} Z\left\{\binom{n+p+1}{p+1} a^n u[n]\right\} &= \frac{1}{p+1} (Z\{nx_1[n]\} + Z\{px_1[n]\} + Z\{x_1[n]\}) = \\ &= \frac{1}{p+1} \left( \frac{(p+1)az^{-1}}{(1-az^{-1})^{p+2}} + \frac{p}{(1-az^{-1})^{p+1}} + \frac{1}{(1-az^{-1})^{p+1}} \right) = \\ &= \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^{p+2}} + \frac{1}{(1-az^{-1})^{p+1}} = \frac{az^{-1} + 1 - az^{-1}}{(1-az^{-1})^{p+2}} = \frac{1}{(1-az^{-1})^{p+2}} \end{aligned} \quad (79)$$

cuya ROC asociada es  $|z| > |a|$ , pues es la única condición de convergencia a la que nos hemos tenido que restringir durante todo el cálculo.

Se observa, pues, que el resultado obtenido para el caso  $p+1$  en (79) encaja con la hipótesis de inducción establecida en (74), lo cual demuestra que tal hipótesis es cierta y, por tanto, nos permite afirmar que la transformada z definida en (74) es correcta.

Ahora, respecto de la señal definida en (61), vemos que, en la misma línea que en apartados anteriores, no es más que la versión orientada a la izquierda, desplazada una muestra y cambiada de signo de la señal definida en (60). Por tanto, el cálculo de su transformada z es totalmente análogo al que acabamos de realizar aquí por inducción: el resultado es el mismo, con la única diferencia de que la ROC es  $|z| < |a|$ . Por tanto:

La transformada z del producto de  $\binom{n+p}{p}$  por  $a^n$  y por un escalón unitario es el inverso de  $(1-az^{-1})^{p+1}$  y su ROC abarca los valores de z de módulo superior a  $|a|$ :

$$\boxed{\binom{n+p}{p} a^n u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{(1-az^{-1})^{p+1}}, \quad |z| > |a|} \quad (80)$$

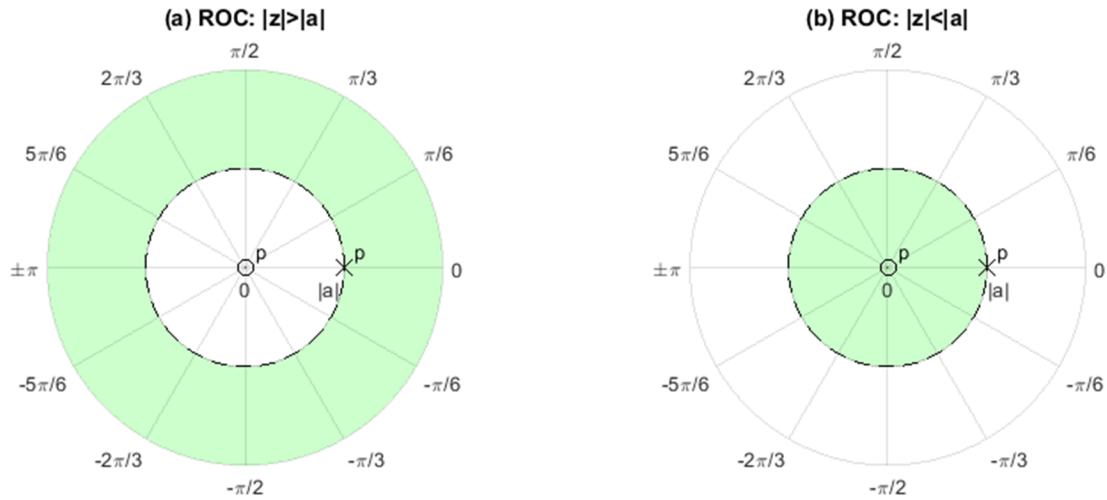
allí donde  $a \in \mathbb{C}$  y  $p \in \mathbb{Z}$ , con  $p \geq 1$ .

La transformada z del producto de  $\binom{n+p}{p}$  por  $a^n$  y por un escalón unitario reflejado horizontalmente, adelantado una muestra y cambiado de signo es el inverso de  $(1-az^{-1})^{p+1}$  y su ROC abarca los valores de z de módulo inferior a  $|a|$ :

$$\boxed{-\binom{n+p}{p} a^n u[-n-1] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{(1-az^{-1})^{p+1}}, \quad |z| < |a|} \quad (81)$$

allí donde  $a \in \mathbb{C}$  y  $p \in \mathbb{Z}$ , con  $p \geq 1$ .

Figura 13. (a) ROC de  $L\left\{\binom{n+p}{p} a^n u[n]\right\}$ . (b) ROC de  $L\left\{-\binom{n+p}{p} a^n u[-n-1]\right\}$ . Ambas tienen  $p$  polos en  $z = a$  (al representar los polos, se ha asumido arbitrariamente que  $a \in \mathbb{R}$ , con  $a > 0$ , de modo que  $|a| = a$  y  $\text{Arg}(a) = 0$ ) y  $p$  ceros en  $z = 0$ .



## 2.5. Producto de señal sinusoidal por escalón unitario

Consideremos ahora el producto de una señal sinusoidal por un escalón unitario:

$$x_1[n] = \cos(\omega_0 n) u[n] \quad (82)$$

$$x_2[n] = \sin(\omega_0 n) u[n] \quad (83)$$

allí donde  $\omega_0$  es una constante real positiva ( $\omega_0 \in \mathbb{R}$ , con  $\omega_0 > 0$ ).

La transformada z de la señal definida en (82) ya está calculada en las ecuaciones (36)-(37) del subapartado 1.3 de este mismo módulo, donde ya hemos visto que su ROC es  $|z| > 1$ :

$$Z\{\cos(\omega_0 n) u[n]\} = \frac{1 - \cos(\omega_0) z^{-1}}{1 - 2\cos(\omega_0) z^{-1} + z^{-2}} \quad (84)$$

Respecto del cálculo de la transformada z de la señal definida en (83), vemos que es análogo al llevado a cabo en (36) y que la ROC resultante es también  $|z| > 1$ :

$$\begin{aligned} Z\{\sin(\omega_0 n) u[n]\} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sin(\omega_0 n) u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(\omega_0 n) z^{-n} = \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{j\omega_0 n} - e^{-j\omega_0 n}}{2j} z^{-n} = \frac{1}{2j} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{j\omega_0} z^{-1})^n - \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-j\omega_0} z^{-1})^n \right) \Big|_{\text{si } |z| > 1} \\ &= \frac{1}{2j} \left( \frac{1}{1 - e^{j\omega_0} z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-j\omega_0} z^{-1}} \right) = \frac{1}{2j} \frac{1 - e^{-j\omega_0} z^{-1} - 1 + e^{j\omega_0} z^{-1}}{(1 - e^{j\omega_0} z^{-1})(1 - e^{-j\omega_0} z^{-1})} = \\ &= \frac{1}{2j} \frac{(e^{j\omega_0} - e^{-j\omega_0}) z^{-1}}{1 - 2\cos(\omega_0) z^{-1} + z^{-2}} = \frac{\sin(\omega_0) z^{-1}}{1 - 2\cos(\omega_0) z^{-1} + z^{-2}} \end{aligned} \quad (85)$$

Por tanto:

**La transformada z del producto de  $\cos(\omega_0 n)$  por un escalón unitario es el cociente entre  $1 - \cos(\omega_0) z^{-1}$  y  $1 - 2\cos(\omega_0) z^{-1} + z^{-2}$  y su ROC abarca los valores de z de módulo superior a 1:**

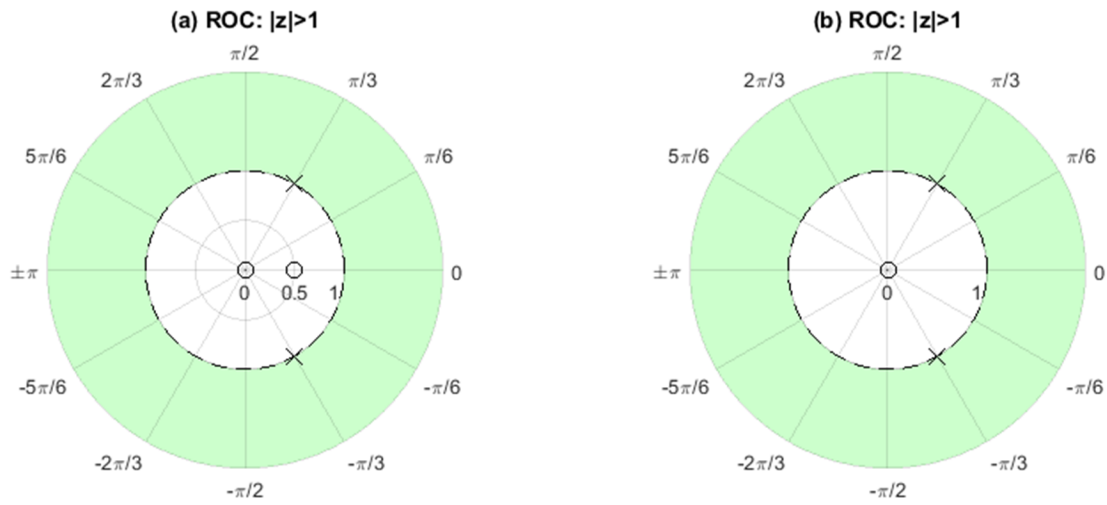
$$\cos(\omega_0 n) u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1 - \cos(\omega_0) z^{-1}}{1 - 2\cos(\omega_0) z^{-1} + z^{-2}}, \quad |z| > 1 \quad (86)$$

**La transformada z del producto de  $\sin(\omega_0 n)$  por un escalón unitario es el cociente entre  $\sin(\omega_0) z^{-1}$  y  $1 - 2\cos(\omega_0) z^{-1} + z^{-2}$  y su ROC abarca los valores de z de módulo superior a 1:**

$$\sin(\omega_0 n) u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{\sin(\omega_0) z^{-1}}{1 - 2\cos(\omega_0) z^{-1} + z^{-2}}, \quad |z| > 1 \quad (87)$$

allí donde  $\omega_0 \in \mathbb{R}$ , con  $\omega_0 > 0$ .

Figura 14. (a) ROC de  $L\{\cos(\omega_0 n)u[n]\}$ . (b) ROC de  $L\{\sin(\omega_0 n)u[n]\}$ . Ambas tienen dos polos en  $z = e^{\pm j\omega_0}$  (al representar los polos, se ha asumido arbitrariamente que  $\omega_0 = \pi/3$ ) y un cero en  $z = 0$ ; además, la primera presenta otro cero en  $z = \cos(\omega_0)$  (y la segunda en  $z \rightarrow \infty$ ).



## 2.6. Producto de señal exponencial por sinusoidal por escalón unitario

Finalmente, consideraremos ahora el resultado de multiplicar las señales definidas en (82) y (83) por una señal exponencial:

$$x_1[n] = a^n \cos(\omega_0 n) u[n] \quad (88)$$

$$x_2[n] = a^n \sin(\omega_0 n) u[n] \quad (89)$$

En este caso, el procedimiento de cálculo es exactamente el mismo que el aplicado en (36) y (85). La única diferencia estriba en que las exponenciales  $a^n$  y  $z^{-n}$  se unen dando lugar a la exponencial  $(az^{-1})^n$ , lo cual tiene consecuencias tanto en la forma final de la señal transformada como en la definición de la ROC.

Para la transformada z de la señal definida en (88):

$$\begin{aligned} Z\{a^n \cos(\omega_0 n) u[n]\} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n \cos(\omega_0 n) u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \cos(\omega_0 n) z^{-n} = \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \frac{e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}}{2} z^{-n} = \frac{1}{2} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{j\omega_0} a z^{-1})^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-j\omega_0} a z^{-1})^n \right) \Big|_{|az^{-1}| < 1} \quad (90) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1 - e^{j\omega_0} a z^{-1}} + \frac{1}{1 - e^{-j\omega_0} a z^{-1}} \right) = \frac{1}{2} \frac{1 - e^{-j\omega_0} a z^{-1} + 1 - e^{j\omega_0} a z^{-1}}{(1 - e^{j\omega_0} a z^{-1})(1 - e^{-j\omega_0} a z^{-1})} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{2 - a(e^{j\omega_0} + e^{-j\omega_0}) z^{-1}}{1 - a(e^{j\omega_0} + e^{-j\omega_0}) z^{-1} + a^2 z^{-2}} = \frac{1 - a \cos(\omega_0) z^{-1}}{1 - 2a \cos(\omega_0) z^{-1} + a^2 z^{-2}} \end{aligned}$$

Obviamente, para la transformada z de la señal definida en (89), el cálculo es análogo al desarrollado en (90). La única diferencia estriba en el numerador de la señal resultante, que en este caso es  $a \sin(\omega_0) z^{-1}$ . Y respecto de la ROC, no hay cambios, puesto que las dos series geométricas que se calculan son las mismas que en (90), las cuales convergen si  $|z| > |a|$ .

Por tanto:

**La transformada z del producto de  $a^n$  por  $\cos(\omega_0 n)$  y por un escalón unitario es el cociente entre  $1 - a \cos(\omega_0) z^{-1}$  y  $1 - 2a \cos(\omega_0) z^{-1} + a^2 z^{-2}$  y su ROC abarca los valores de z de módulo superior a |a|:**

$$a^n \cos(\omega_0 n) u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1 - a \cos(\omega_0) z^{-1}}{1 - 2a \cos(\omega_0) z^{-1} + a^2 z^{-2}}, \quad |z| > |a| \quad (91)$$

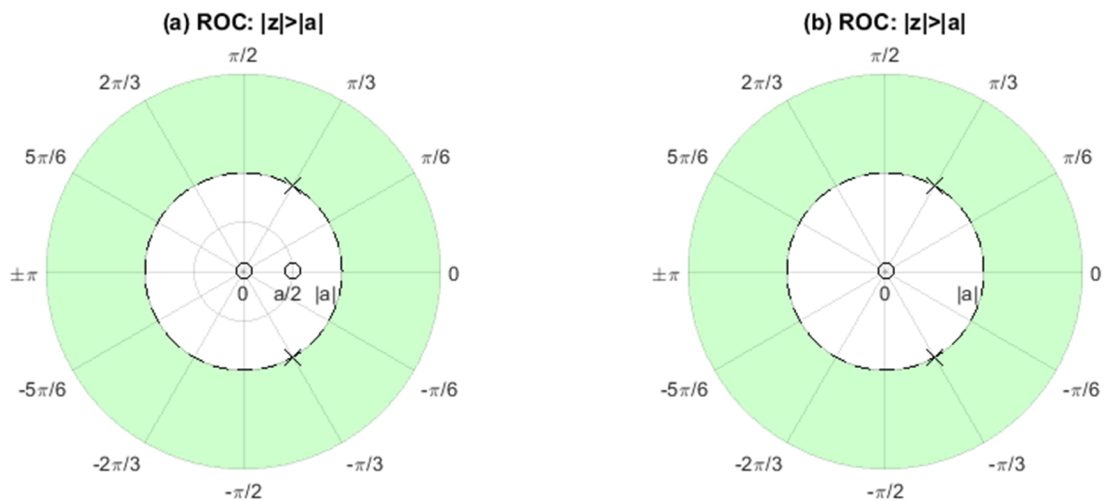
allí donde  $a \in \mathbb{C}$  y  $\omega_0 \in \mathbb{R}$ , con  $\omega_0 > 0$ .

**La transformada z del producto de  $a^n$  por  $\sin(\omega_0 n)$  y por un escalón unitario es el cociente entre  $a \sin(\omega_0) z^{-1}$  y  $1 - 2a \cos(\omega_0) z^{-1} + a^2 z^{-2}$  y su ROC abarca los valores de z de módulo superior a |a|:**

$$a^n \sin(\omega_0 n) u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{a \sin(\omega_0) z^{-1}}{1 - 2a \cos(\omega_0) z^{-1} + a^2 z^{-2}}, \quad |z| > |a| \quad (92)$$

allí donde  $a \in \mathbb{C}$  y  $\omega_0 \in \mathbb{R}$ , con  $\omega_0 > 0$ .

Figura 15. (a) ROC de  $L\{a^n \cos(\omega_0 n) u[n]\}$ . (b) ROC de  $L\{a^n \sin(\omega_0 n) u[n]\}$ . Ambas tienen dos polos en  $z = a e^{\pm j\omega_0}$  (al representar los polos, se ha asumido arbitrariamente que  $a \in \mathbb{R}$ , con  $a > 0$ , y que  $\omega_0 = \pi/3$ ) y un cero en  $z = 0$ ; además, la primera presenta otro cero en  $z = a \cos(\omega_0)$  (y la segunda en  $z \rightarrow \infty$ ).





## 2.7. Tabla de resumen de transformadas z de señales típicas

La tabla 1 contiene un resumen de las transformadas z típicas más relevantes para la teoría de señales y sistemas. En la notación usada en la tabla se asume en todo momento que:

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z), \quad \text{ROC} \quad (93)$$

y que  $a$ ,  $\omega_0$ ,  $n_0$  y  $p$  son constantes, siendo  $a \in \mathbb{C}$ ;  $\omega_0 \in \mathbb{R}$ , con  $\omega_0 > 0$ ; y  $n_0, p \in \mathbb{Z}$ , con  $p \geq 1$ :

Tabla 1. Transformadas z de señales típicas

$x[n]$	$X(z)$	ROC
$\delta[n]$	1	$\forall z$
$\delta[n - n_0]$	$z^{-n_0}$	$\forall z - \begin{cases} z = 0 & \text{si } n_0 > 0 \\ z \rightarrow \infty & \text{si } n_0 < 0 \end{cases}$
$u[n]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z  > 1$
$-u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z  < 1$
$a^n u[n]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z  >  a $
$-a^n u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z  <  a $
$\binom{n+p}{p} a^n u[n]$	$\frac{1}{(1 - az^{-1})^{p+1}}$	$ z  >  a $
$-\binom{n+p}{p} a^n u[-n - 1]$	$\frac{1}{(1 - az^{-1})^{p+1}}$	$ z  <  a $
$\cos(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{1 - \cos(\omega_0) z^{-1}}{1 - 2\cos(\omega_0) z^{-1} + z^{-2}}$	$ z  > 1$
$\sin(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{\sin(\omega_0) z^{-1}}{1 - 2\cos(\omega_0) z^{-1} + z^{-2}}$	$ z  > 1$
$a^n \cos(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{1 - a\cos(\omega_0) z^{-1}}{1 - 2a\cos(\omega_0) z^{-1} + a^2 z^{-2}}$	$ z  >  a $
$a^n \sin(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{a\sin(\omega_0) z^{-1}}{1 - 2a\cos(\omega_0) z^{-1} + a^2 z^{-2}}$	$ z  >  a $

Conviene notar que estos resultados ilustran bien un hecho singularmente importante: **señales temporales diferentes pueden tener asociadas señales transformadas cuya expresión sea la misma y que solo se diferencien en su ROC**. Se pueden comparar, por ejemplo, las transformadas  $z$  de  $u[n]$  y  $-u[-n-1]$  o las de  $a^n u[n]$  y  $-a^n u[-n-1]$ .

### 3. Propiedades de la transformada z

En este apartado se proporcionan las propiedades fundamentales de la transformada z. En consonancia con el apartado anterior, el objetivo es poder aplicar estas propiedades, en combinación con las transformadas conocidas de señales básicas, para calcular transformadas z, tanto directas como inversas, de señales de mayor complejidad.

Además, varias de estas propiedades juegan un papel crucial en la caracterización de los sistemas LIT digitales en el dominio transformado z, como veremos en el apartado 5 de este mismo módulo. Debido a esto, en el subapartado 3.7 se proporciona una tabla de resumen de todas estas propiedades para poder consultarla rápidamente cuando sea que se requiera.

#### 3.1. Linealidad

Sean  $x_1[n]$  y  $x_2[n]$  dos señales digitales tales que:

$$x_1[n] \xleftrightarrow{Z} X_1(z), \quad R_1 \quad (94)$$

$$x_2[n] \xleftrightarrow{Z} X_2(z), \quad R_2 \quad (95)$$

La transformada z de cualquier combinación lineal de  $x_1[n]$  y  $x_2[n]$  es igual a esa misma combinación lineal de  $X_1(z)$  y  $X_2(z)$  (ver demostración 2):

$$\boxed{\alpha x_1[n] + \beta x_2[n] \xleftrightarrow{Z} \alpha X_1(z) + \beta X_2(z), \quad R} \quad (96)$$

allí donde  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes, en general, complejas ( $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ) y donde la ROC de  $\alpha X_1(z) + \beta X_2(z)$  contiene, al menos, la intersección de  $R_1$  y  $R_2$ ; es decir,  $R_1 \cap R_2 \subseteq R$ .

En todo caso, si  $R_1 \cap R_2 = \emptyset$ , entonces  $R = \emptyset$  y la señal  $\alpha x_1[n] + \beta x_2[n]$  no existe.

#### Demostración 2

Calculamos directamente la transformada z de  $\alpha x_1[n] + \beta x_2[n]$ :

$$\begin{aligned}
Z\{\alpha x_1[n] + \beta x_2[n]\} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\alpha x_1[n] + \beta x_2[n])z^{-n} = \\
\alpha \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1[n]z^{-n}}_{X_1(z)} + \beta \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2[n]z^{-n}}_{X_2(z)} &= \alpha X_1(z) + \beta X_2(z) \quad (97)
\end{aligned}$$

Respecto de la ROC de la señal  $\alpha X_1(z) + \beta X_2(z)$ , necesariamente ha de contener la intersección de las ROC de las señales  $X_1(z)$  y  $X_2(z)$ , puesto que es necesario que existan  $X_1(z)$  y  $X_2(z)$  para que exista  $\alpha X_1(z) + \beta X_2(z)$ .

De esto último se sigue que, si  $R_1 \cap R_2 = \emptyset$ , entonces  $R = \emptyset$  y la señal  $\alpha X_1(z) + \beta X_2(z)$  no existe, puesto que, en ese caso, no habría ningún valor de  $z$  para el que estuvieran simultáneamente definidas  $X_1(z)$  y  $X_2(z)$ .

Sin embargo, no es correcto afirmar sin más que  $R = R_1 \cap R_2$ , puesto que bien puede darse el caso de que  $R$  sea más grande que la intersección de  $R_1$  y  $R_2$ . Para demostrarlo, consideremos el siguiente caso particular:  $x_1[n] = -x_2[n] + x_3[n]$ , siendo  $x_3[n]$  una señal de longitud finita, y  $\alpha = \beta = 1$ . En este caso,  $\alpha x_1[n] + \beta x_2[n] = x_3[n]$  y, debido a que  $x_3[n]$  es una señal finita, su ROC abarca todo el plano  $z$ ; por tanto,  $R = \forall z$  (con la excepción, quizás, de  $z = 0$  o  $z \rightarrow \infty$ ). Puesto que  $x_1[n]$  y  $x_2[n]$  no tienen por qué ser señales finitas, la intersección de  $R_1$  y  $R_2$  no tiene por qué abarcar todo el plano  $z$  ( $R_1 \cap R_2 \neq \forall z$ ); por lo tanto,  $R \neq R_1 \cap R_2$ .

Así, lo máximo que puede decirse acerca de la ROC de  $\alpha X_1(z) + \beta X_2(z)$  es que contiene, al menos, las ROC de  $X_1(z)$  y  $X_2(z)$ ; o sea, que  $R_1 \cap R_2$  es un subconjunto de  $R$  ( $R_1 \cap R_2 \subseteq R$ ).

En general, para toda constante  $N$  entera mayor o igual que 2 ( $N \in \mathbb{Z}$ , siendo  $N \geq 2$ ):

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i x_i[n] \xleftrightarrow{L} \sum_{i=1}^N \alpha_i X_i(z), \quad R \quad (98)$$

allí donde todas las  $\alpha_i$  son constantes, en general, complejas ( $\alpha_i \in \mathbb{C}$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, N\}$ ) y donde  $R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_N \subseteq R$ .

### 3.2. Desplazamiento en el dominio temporal

Sea  $x[n]$  una señal digital tal que:

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z), \quad R \quad (99)$$

La transformada de Laplace de  $x[n]$  sometida a un desplazamiento horizontal arbitrario de  $n_0$  muestras es igual al producto de  $X(z)$  por la exponencial compleja  $z^{-n_0}$  (ver demostración 3):

$$\boxed{x[n - n_0] \xleftrightarrow{Z} z^{-n_0} X(z), \quad R'} \quad (100)$$

allí donde  $n_0$  es una constante entera ( $n_0 \in \mathbb{Z}$ ) y donde  $R' = R$ , salvo por la posible adición o sustracción de los valores  $z = 0$  o  $z \rightarrow \infty$ .

#### Demostración 3

Calculamos directamente la transformada z de  $x[n - n_0]$ :

$$\begin{aligned} Z\{x[n - n_0]\} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n - n_0] z^{-n} = \left\{ \begin{array}{c} (m = n - n_0) \\ n = m + n_0 \\ n \rightarrow \pm \infty \Rightarrow m \rightarrow \pm \infty \end{array} \right\} = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] z^{-(m+n_0)} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] z^{-m} z^{-n_0} = z^{-n_0} \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] z^{-m}}_{X(z)} = z^{-n_0} X(z) \end{aligned} \quad (101)$$

Respecto de la ROC de  $z^{-n_0} X(z)$ , se observa que ha de incluir, al menos, a la ROC de la señal  $X(z)$ , como consecuencia de que  $z^{-n_0} X(z)$  incluye a  $X(z)$ . Sin embargo, si  $n_0 > 0$ , el valor de  $z^{-n_0}$  tiende a infinito para  $z = 0$ ; y, si  $n_0 < 0$ , el valor de  $z^{-n_0}$  tiende a infinito para  $z \rightarrow \infty$ . Por tanto, podría darse el caso de que alguno de estos dos valores de  $z$  ( $z = 0$  o  $z \rightarrow \infty$ ) quedara excluido de la ROC de  $z^{-n_0} X(z)$  o que quedara incluido en ella, o bien que sucedieran ambas cosas.

Esto se ve muy claro en el siguiente ejemplo: asumamos que  $x[n] = \delta[n - 1]$  y que  $n_0 = -2$ , con lo que  $x[n - n_0] = \delta[n + 1]$ . Aquí,  $Z\{x[n]\} = z^{-1}$  y su ROC es todo el plano  $z$  (incluyendo a  $z \rightarrow \infty$ , donde hay un cero), salvo  $z = 0$ , donde hay un polo (valor excluido de la ROC). Sin embargo,  $Z\{x[n - n_0]\} = z^2 z^{-1} = z$ , con lo que su ROC es todo el plano  $z$  (incluyendo a  $z = 0$ , donde hay un cero), salvo  $z \rightarrow \infty$ , donde hay un polo (valor excluido de la ROC). Por tanto, al aplicarle un desplazamiento temporal  $x[n]$ , hemos provocado que  $z = 0$  pase a estar incluido en la ROC y que  $z \rightarrow \infty$  deje de estarlo.

Por lo tanto, la ROC de  $z^{-n_0} X(z)$  es igual a la ROC de  $X(z)$ , salvo por la posible adición o sustracción de los valores  $z = 0$  o  $z \rightarrow \infty$ .

### 3.3. Escalado de la variable del dominio transformado

Sea  $x[n]$  una señal analógica tal que:

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z), \quad R \quad (102)$$

Multiplicar  $x[n]$  por una señal exponencial compleja de la forma  $a^n$  implica escalar la variable independiente de  $X(z)$  en un factor  $a^{-1}$  (ver demostración 4):

$$\boxed{a^n x[n] \xleftrightarrow{Z} X(a^{-1}z), \quad |a|R} \quad (103)$$

allí donde  $a$  es una constante compleja ( $a \in \mathbb{C}$ ) y donde la ROC de  $X(a^{-1}z)$  es una versión escalada horizontalmente en un factor  $|a|$  de la ROC de  $X(z)$  (es decir, de  $R$ ).

Sobre la ROC de  $X(a^{-1}z)$ , nótese que si, por ejemplo,  $X(z)$  tiene un polo en  $z = z_0$ , entonces  $X(a^{-1}z)$  tiene un polo en  $a^{-1}z = z_0$ ; o sea, en  $z = az_0$ ; el módulo de este polo es  $|a||z_0|$  y su fase es  $\text{Arg}(a) + \text{Arg}(z_0)$ . Así, puesto que los límites de la ROC son siempre circunferencias de radio igual al módulo de un polo, la ROC de  $X(a^{-1}z)$  es igual a la ROC de  $X(z)$  sometida a un escalado de magnitud  $|a|$  respecto a los radios de las circunferencias que limitan la ROC:

- Si  $|a| > 1$ , entonces la ROC de  $X(a^{-1}z)$  es una versión «comprimida» de la ROC de  $X(z)$  en un factor  $|a|$ .
- Si  $|a| < 1$ , entonces la ROC de  $X(a^{-1}z)$  es una versión «expandida» de la ROC de  $X(z)$  en un factor  $|a|$ .

#### Demostración 4

Calculamos directamente la transformada z de  $a^n x[n]$ :

$$\begin{aligned} Z\{a^n x[n]\} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] (a^{-1}z)^{-n} = \{v = a^{-1}z\} = \\ &= \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] v^{-n}}_{X(v)} = \underbrace{X(v)}_{v=a^{-1}z} = X(a^{-1}z) \end{aligned} \quad (104)$$

Se observa que si la ROC de  $X(z)$ , que denominamos  $R$ , es, en general,  $|z_1| < |z| < |z_2|$ , entonces el conjunto de valores de  $v$  para el que el cálculo de  $X(v)$  converge es, en general,  $|v_1| < |v| < |v_2|$ . Así pues, al deshacer el cambio de variable  $v = a^{-1}z$  sucede que el conjunto de valores de  $z$  para el que el cálculo de  $X(a^{-1}z)$  converge es:

$$|z_1| < |a^{-1}z| < |z_2| \Rightarrow |z_1| < |z|/|a| < |z_2| \Rightarrow |a||z_1| < |z| < |a||z_2| \quad (105)$$

Por tanto, esta sería la ROC de  $X(a^{-1}z)$ , que denominamos  $R'$ , de modo que  $R' = |a|R$ .

### 3.4. Conjugación compleja

Sea  $x[n]$  una señal digital tal que:

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z), \quad R \quad (106)$$

La transformada z del complejo conjugado de  $x[n]$  es igual al complejo conjugado de  $X(z)$  tras haber aplicado el complejo conjugado a la variable z (ver demostración 5):

$$x^*[n] \xleftrightarrow{Z} X^*(z^*), \quad R \quad (107)$$

Un importante corolario de esta propiedad es que **la transformada z de toda señal real es igual al complejo conjugado de sí misma tras haberle aplicado el conjugado de z:**

$$x[n] \in R \Rightarrow x[n] = x^*[n] \Rightarrow X(z) = X^*(z^*) \quad (108)$$

Por tanto, siempre que  $x[n]$  sea una señal real, cualquier cero o polo no reales de  $X(z)$  vendrán acompañados de, respectivamente, otro cero o polo en el punto conjugado: si  $X(z)$  presenta un cero o un polo en  $z = z_0$ , también presentará un cero o un polo en  $z = z_0^*$ . Es decir, que, **si  $x[n]$  es real, todo cero o polo de  $X(z)$  no situado en el eje de abscisas del plano z (o sea, todo cero o polo no real) tendrá una pareja conjugada** (las parejas de polos de la figura 8, la figura 14 o la figura 15 son un buen ejemplo de esto).

#### Demostración 5

Recordemos que el complejo conjugado de un número complejo se calcula indistintamente cambiando el signo de su parte imaginaria o cambiando el signo de su fase:

$$\alpha = Re(\alpha) + j Im(\alpha) = |\alpha| e^{j Arg(\alpha)} \Rightarrow \alpha^* = Re(\alpha) - j Im(\alpha) = |\alpha| e^{-j Arg(\alpha)} \quad (109)$$

En esta demostración, vamos a conjugar tanto la variable z como las señales  $x[n]$  y  $X(z)$  cambiándole el signo a su fase:

$$z^* = |z| e^{-j Arg(z)} \quad (110)$$

$$x^*[n] = |x[n]| e^{-j Arg(x[n])} \quad (111)$$

$$X^*(z) = |X(z)| e^{-j Arg(X(z))} \Rightarrow X^*(z^*) = |X(z^*)| e^{-j Arg(X(z^*))} \quad (112)$$

Por otra parte, el complejo conjugado de la suma de dos o más números complejos puede obtenerse directamente conjugando cada uno de los sumandos:

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N)^* = |\alpha_1|e^{-j\text{Arg}(\alpha_1)} + |\alpha_2|e^{-j\text{Arg}(\alpha_2)} + \dots + |\alpha_N|e^{-j\text{Arg}(\alpha_N)} \quad (113)$$

Esto último se demuestra muy fácilmente, comparando la suma de dos números complejos con la suma de sus complejos conjugados:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &= \underbrace{(\text{Re}(\alpha_1) + \text{Re}(\alpha_2))}_A + j \underbrace{(\text{Im}(\alpha_1) + \text{Im}(\alpha_2))}_B = A + jB \\ (\alpha_1 + \alpha_2)^* &= A - jB \\ \alpha_1^* + \alpha_2^* &= \underbrace{(\text{Re}(\alpha_1) + \text{Re}(\alpha_2))}_A + j \underbrace{(-\text{Im}(\alpha_1) - \text{Im}(\alpha_2))}_{-B} = A - jB = (\alpha_1 + \alpha_2)^* \end{aligned} \quad (114)$$

Aclarado todo esto, planteamos, primero, la transformada z de  $x^*[n]$  aplicando (111):

$$\begin{aligned} Z\{x^*[n]\} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^*[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|e^{-j\text{Arg}(x[n])}(|ze^{j\text{Arg}(z)}|)^{-n} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|z^{-n}e^{-j\text{Arg}(x[n])}e^{-j\text{Arg}(z)n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|z^{-n}e^{-j(\text{Arg}(x[n]) + \text{Arg}(z)n)} \end{aligned} \quad (115)$$

Nótese que en (115) está separada la información de módulo ( $|x[n]| |z|^{-n}$ ) de la información de fase ( $e^{-j(\text{Arg}(x[n]) + \text{Arg}(z)n)}$ ), puesto que  $|z|^{-n}$  no es otra cosa que  $1/|z|^n$ .

Ahora, y de forma análoga, planteamos la transformada z de  $x[n]$ :

$$\begin{aligned} X(z) = Z\{x[n]\} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|e^{j\text{Arg}(x[n])}(|ze^{j\text{Arg}(z)}|)^{-n} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|z^{-n}e^{j\text{Arg}(x[n])}e^{-j\text{Arg}(z)n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|z^{-n}e^{j(\text{Arg}(x[n]) - \text{Arg}(z)n)} \end{aligned} \quad (116)$$

Se observa que las únicas diferencias entre la expresión obtenida en (115) para  $Z\{x^*[n]\}$  y la expresión obtenida en (116) para  $X(z)$  se dan en la información referida a la fase (concretamente, en los signos de la exponencial con base  $e$ ).

Entonces, conjugar la variable  $z$  en (116) implica, aplicando (110), cambiarle el signo a  $\text{Arg}(z)$ :

$$X(z^*) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|z^{-n}e^{j(\text{Arg}(x[n]) + \text{Arg}(z)n)} \quad (117)$$

Finalmente, conjugar la señal  $X(z^*)$  en (117) implica, aplicando (112) y (113), cambiar el signo del exponente de la exponencial con base  $e$  (conjugando, así, cada uno de los sumandos incluidos en el sumatorio en  $n$ ). Al hacerlo, obtenemos justamente la expresión de la ecuación (115):

$$X^*(z^*) = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| |z|^{-n} e^{-j(\text{Arg}(x[n]) + \text{Arg}(z)n)}}_{Z\{x^*[n]\}} = Z\{x^*[n]\} \quad (118)$$

Respecto de la ROC de  $X^*(z^*)$ , se observan dos cosas:

- Conjugar la variable  $z$  implica cambiar el signo de la fase de los ceros y los polos de  $X(z)$ , de modo que los módulos de los ceros y los polos de  $X(z^*)$  son los mismos que los de los ceros y los polos de  $X(z)$ .



- Y, luego, conjugar la señal  $X(z^*)$  implica cambiar de nuevo el signo de la fase de los ceros y los polos de  $X(z^*)$ , de modo que los ceros y los polos de  $X^*(z^*)$  son los mismos que los de  $X(z)$ .

Puesto que los polos de  $X^*(z^*)$  y  $X(z)$  son los mismos, las ROC de  $X^*(z^*)$  y  $X(z)$  son la misma.

### 3.5. Convolución en el dominio temporal

Sean  $x_1[n]$  y  $x_2[n]$  dos señales analógicas tales que:

$$x_1[n] \xleftrightarrow{Z} X_1(z), \quad R_1 \quad (119)$$

$$x_2[n] \xleftrightarrow{Z} X_2(z), \quad R_2 \quad (120)$$

La transformada z de la convolución entre  $x_1[n]$  y  $x_2[n]$  es igual al producto de  $X_1(z)$  por  $X_2(z)$  (ver demostración 6):

$$\boxed{x_1[n] * x_2[n] \xleftrightarrow{Z} X_1(z)X_2(z), \quad R} \quad (121)$$

allí donde la ROC de  $X_1(z)X_2(z)$  contiene, al menos, la intersección de  $R_1$  y  $R_2$ ; es decir,  $R_1 \cap R_2 \subseteq R$ .

En todo caso, si  $R_1 \cap R_2 = \emptyset$ , entonces  $R = \emptyset$  y la señal  $X_1(z)X_2(z)$  no existe.

#### Demostración 6

Calculamos directamente el resultado de la ecuación de análisis de la transformada z para el sumatorio de convolución entre  $x_1[n]$  y  $x_2[n]$ :

$$\begin{aligned} Z\{x_1[n] * x_2[n]\} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left( \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1[m]x_2[n-m] \right) z^{-n} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left( \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_2[n-m] z^{-n} \right) x_1[m] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} z^{-m} X_2(z) x_1[m] = \\ &\quad \underbrace{Z\{x_2[n-m]\}}_{=z^{-m}X_2(z)} x_1[m] = \\ &= \underbrace{\left( \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1[m] z^{-m} \right)}_{X_1(z)} X_2(z) = X_1(z)X_2(z) \end{aligned} \quad (122)$$

Se observa la aplicación de la propiedad de desplazamiento temporal de la transformada z para obtener que  $Z\{x_2[n-m]\} = z^{-m}X_2(z)$ .

Respecto de la ROC de  $X_1(z)X_2(z)$ , y del mismo modo que en la demostración 2, aquí también sucede que si  $R_1 \cap R_2 = \emptyset$ , entonces  $R = \emptyset$  y la señal  $X_1(z)X_2(z)$  no existe. Y, además, bien puede darse el caso de que en el producto  $X_1(z)X_2(z)$  se cancele algún polo de  $X_1(z)$ ,  $X_2(z)$  o ambas (por ejemplo, si  $X_1(z)$  presenta un cero allí donde  $X_2(z)$  presenta un polo, ese cero y ese polo se cancelan en  $X_1(z)X_2(z)$ ) y que, por tanto, la ROC de  $X_1(z)X_2(z)$  sea más amplia que el resultado de  $R_1 \cap R_2$ .

Por lo tanto, lo máximo que podemos decir es que  $R_1 \cap R_2 \subseteq R$ .

En general, para toda constante  $N$  entera mayor o igual que 2 ( $N \in \mathbb{Z}$ , siendo  $N \geq 2$ ):

$$x_1[n] * x_2[n] * \dots * x_N[n] \xleftrightarrow{Z} \prod_{i=1}^N X_i(z) = X_1(z) X_2(z) \dots X_N(z), \quad R \quad (123)$$

allí donde  $R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_N \subseteq R$ .

### 3.6. Derivación en el dominio transformado

Sea  $x[n]$  una señal analógica tal que:

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z), \quad R \quad (124)$$

La transformada z del producto de  $z$  por  $x[n]$  es igual al producto de  $-z$  por la derivada de  $X(z)$  respecto de  $z$  (ver demostración 7):

$$\boxed{nx[n] \xleftrightarrow{Z} -z \frac{dX(z)}{dz}, \quad R'} \quad (125)$$

allí donde  $R' = R$ , salvo por la posible adición o sustracción de los valores  $z = 0$  o  $z \rightarrow \infty$ .

#### Demostración 7

Calculamos directamente la transformada z de  $nx[n]$ :

$$\begin{aligned} Z\{nx[n]\} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} nx[n]z^{-n} = -z \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n](-nz^{-n-1}) = \\ &= -z \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \frac{dz^{-n}}{dz} = -z \frac{d}{dz} \left( \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}}_{X(z)} \right) = -z \frac{dX(z)}{dz} \end{aligned} \quad (126)$$

Dado que  $dX(z)/dz$  implica la existencia de  $X(z)$ , la ROC de  $dX(z)/dz$  es la misma que la de  $X(z)$ . Sin embargo, derivar  $X(z)$  puede provocar que  $z = 0$  o  $z \rightarrow \infty$  pasen a estar incluidos en la ROC o dejen de estarlo: considérese, por ejemplo, la derivada de  $z^{-1}$ . Y lo mismo puede decirse del efecto de multiplicar  $dX(z)/dz$  por  $-z$ . Por tanto, la ROC de  $-z(dX(z)/dz)$  es igual a la ROC de  $X(z)$ , salvo por la posible adición o sustracción de los valores  $z = 0$  o  $z \rightarrow \infty$ .

### 3.7. Tabla de resumen de propiedades de la transformada z

La tabla 2 contiene un resumen de las propiedades fundamentales de la transformada z más relevantes para la teoría de señales y sistemas, más el denominado *Teorema del valor inicial* de la transformada z (que aparecen enunciados al final de la tabla). En la notación usada en la tabla,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $a$  y  $n_0$  son constantes tales que  $\alpha, \beta, a \in \mathbb{C}$ , y  $n_0 \in \mathbb{Z}$ :

Tabla 2. Propiedades fundamentales de la transformada z

Propiedad	Señal temporal	Transformada z	ROC
	$x[n]$ $x_1[n]$ $x_2[n]$	$X(z)$ $X_1(z)$ $X_2(z)$	$R$ $R_1$ $R_2$
Linealidad	$\alpha x_1[n] + \beta x_2[n]$	$\alpha X_1(z) + \beta X_2(z)$	Al menos, $R_1 \cap R_2$
Desplazamiento temporal	$x[n - n_0]$	$z^{-n_0} X(z)$	$R$ , con la posible adición o sustracción de $z = 0$ o $z \rightarrow \infty$
Escalado de la variable z	$a^n x[n]$	$X(a^{-1}z)$	$ a R$
Conjugación compleja	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	$R$
Convolución temporal	$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(z)X_2(z)$	Al menos, $R_1 \cap R_2$
Derivación en el dominio z	$nx[n]$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$	$R$ , con la posible adición o sustracción de $z = 0$ o $z \rightarrow \infty$
Teorema del valor inicial	Si $x[n] = 0$ para $n < 0$ , entonces: $x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$		

## 4. Cálculo de la transformada z inversa

En este apartado se aborda el problema del cálculo de la transformada z inversa. En primer lugar, se introduce la forma genérica que, en general, adopta toda señal transformada en el dominio z (señal racional en forma de cociente de polinomios) y se estudian sus principales características (subapartado 4.1).

A continuación, y trabajando con un ejemplo sencillo a fin de proporcionar un hilo narrativo que facilite la comprensión de los conceptos importantes, se plantean las diferentes propiedades de la ROC y su relación con la forma de la señal temporal asociada a la señal transformada (subapartado 4.2).

Finalmente, el apartado se cierra con la exposición de una estrategia general de cálculo de la transformada z inversa que, al hilo de lo visto en los dos apartados anteriores y basándose en la aplicación de algunas de las transformadas típicas y de las propiedades de la transformada z ya estudiadas en los apartados 2 y 3, respectivamente, permite evitar el tener que trabajar directamente con la ecuación de síntesis de la transformada z (subapartado 4.3).

### 4.1. Factorización de señales racionales

De entrada, sabemos por las propiedades de la señal delta que toda señal digital  $x[n]$  puede expresarse como el resultado de una combinación lineal de deltas discretas (una expresión que, como también sabemos, es equivalente al sumatorio de convolución entre  $x[n]$  y  $\delta[n]$ ):

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\delta[n-m] = \dots + x[-2]\delta[n+2] + x[m]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2] + \dots \quad (127)$$

de modo tal que la señal delta z-ésima de la combinación lineal ( $\delta[n-m]$ ) está multiplicada por  $x[m]$ , es decir, el valor de amplitud de  $x[n]$  en la muestra  $n=m$ .

Si ahora calculamos la transformada z de  $x[n]$  a partir de la combinación lineal de señales delta definida en (127), obtenemos, aplicando las propiedades de linealidad y desplazamiento temporal de la transformada z junto con el resultado de la transformada z de  $\delta[n-n_0]$  (ver subapartados 3.1 y 3.2 y 2.1 de este mismo módulo, respectivamente), la siguiente serie de potencias:

$$\begin{aligned}
 X(z) = Z\{x[n]\} &= Z\left\{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\delta[n-m]\right\} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] \underbrace{Z\{\delta[n-m]\}}_{z^{-m}} = \\
 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]z^{-m} &= \dots + x[-2]z^2 + x[-1]z + x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + \dots
 \end{aligned} \tag{128}$$

Se observa que esta serie de potencias da lugar a un polinomio en  $z$ , en general, compuesto por infinitos monomios (puesto que, en general, la longitud de la serie es infinita). De hecho, si  $x[n]$  es una señal infinita, efectivamente, el polinomio resultante estará compuesto por infinitos monomios. Y, solo si  $x[n]$  es una señal finita, el polinomio resultante será también de longitud finita.

En cualquier caso, lo relevante es que (128) viene a demostrar lo siguiente:

Sea  $x[n]$  una señal digital cualquiera. **La transformada  $z$  de  $x[n]$  siempre puede expresarse como una señal  $X(z)$  en forma de polinomio en  $z$ , donde el coeficiente del monomio de grado  $m$  es el valor de amplitud de  $x[n]$  en la muestra  $n = m$ .**

Sin embargo, en la práctica, este hecho solo tiene utilidad real si  $x[n]$  es una señal de longitud finita y acotada en amplitud, puesto que, en tal caso, el cálculo de su transformada  $z$  es inmediato y da lugar a un polinomio en  $z$  de longitud finita:

$$\left. \begin{aligned} x[n] &= 0, \forall n \notin \{n_1, \dots, n_2\} \\ |x[n]| &< A, \forall n \in Z \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow X(z) = \sum_{m=n_1}^{n_2} x[m]z^{-m} = x[n_1]z^{-n_1} + \dots + x[n_2]z^{-n_2} \tag{129}$$

allí donde  $A$  es una cota de amplitud finita arbitraria ( $A \in \mathbb{R}$ , con  $A < \infty$ ); donde  $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ , siendo  $n_1 \leq n_2$ ; y donde la ROC de  $X(z)$  abarca todo el plano  $z$ , con las posibles excepciones de los valores  $z = 0$  y  $z \rightarrow \infty$ :

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z), \quad \forall z - \left\{ \begin{array}{ll} z=0 & \text{si } x[n] \neq 0 \text{ para alguna } n > 0 \\ z \rightarrow \infty & \text{si } x[n] \neq 0 \text{ para alguna } n < 0 \end{array} \right\} \tag{130}$$

Si, por el contrario,  $x[n]$  es una señal de longitud infinita, el resultado obtenido en (128) sigue siendo cierto, pero poco útil en la práctica, puesto que el cálculo de su transformada  $z$  implicaría trabajar con una serie infinita de potencias de  $z$  (o sea, con un polinomio en  $z$  compuesto de infinitos monomios). En este caso, lo interesante es restringir el ámbito de trabajo a **series infinitas de potencias de  $z$  que puedan ser expresadas de manera compacta en forma de cociente de dos polinomios en  $z$  finitos**. Y, en este punto, conviene aclarar que todas las señales digitales en el dominio del tiempo con las que se trabaja

en la teoría de señales y sistemas cumplen esta condición (su transformada  $z$  es expresable en forma de cociente de dos polinomios finitos), de modo que podemos asumirla sin mayores problemas.

Por lo tanto, y sin pérdida de generalidad, podemos afirmar que el uso que haremos de la transformada  $z$  para caracterizar señales digitales y, sobre todo, sistemas LIT digitales quedará siempre restringido a **señales transformadas racionales cuya forma es la de un cociente de polinomios** (de hecho, si nos fijamos bien, todas las señales transformadas calculadas hasta este punto en los apartados anteriores de este mismo módulo son de esta forma).

Es decir, que, en el marco de la teoría de señales y sistemas, toda señal  $X(z)$  será siempre de la siguiente forma:

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{M-1} z^{-(M-1)} + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{N-1} z^{-(N-1)} + a_N z^{-N}} \quad (131)$$

siendo el numerador  $B(z)$  un polinomio de orden  $M$  y con coeficientes  $b_i$  ( $\forall i \in \{0, \dots, M\}$ ), y el denominador  $A(z)$  un polinomio de orden  $N$  y con coeficientes  $a_i$  ( $\forall i \in \{0, \dots, N\}$ ).

A partir de esta forma general, se observa que **calcular los ceros y los polos de  $X(z)$  consistirá siempre en factorizar  $B(z)$  y  $A(z)$** , de modo tal que la expresión de  $X(z)$  se transforme en lo siguiente:

$$X(z) = G \frac{\prod_{i=1}^M (1 - c_i z^{-1})}{\prod_{i=1}^N (1 - p_i z^{-1})} = G \frac{(1 - c_1 z^{-1})(1 - c_2 z^{-1}) \cdots (1 - c_M z^{-1})}{(1 - p_1 z^{-1})(1 - p_2 z^{-1}) \cdots (1 - p_N z^{-1})} \quad (132)$$

allí donde:

1)  $G$  es un valor constante (independiente de  $z$ ) denominado **factor de ganancia** de  $X(z)$ , tal que:

$$G = \frac{b_M}{a_N} \quad (133)$$

2) Los coeficientes  $c_i$  ( $\forall i \in \{1, \dots, M\}$ ) son **ceros de  $X(z)$  que coinciden con los ceros del polinomio  $B(z)$** .

3) Los coeficientes  $p_i$  ( $\forall i \in \{1, \dots, N\}$ ) son **polos de  $X(z)$  que coinciden con los polos del polinomio  $A(z)$** .

4) Se cumple siempre que:

$$\prod_{i=1}^M c_i = \frac{b_0}{b_M} \quad \text{y} \quad \prod_{i=1}^N p_i = \frac{a_0}{a_M} \quad (134)$$

5) Si  $M > N$ , entonces  $X(z)$  presenta, además,  **$M - N$  polos en  $z = 0$** .

6) Si  $M < N$ , entonces  $X(z)$  presenta, además,  **$N - M$  ceros en  $z = 0$** .

Perfectamente podría darse el caso de que algún cero de  $B(z)$  y algún cero de  $A(z)$  coincidiesen; es decir, que  $c_i = p_j$ . En general, para cada pareja  $c_i = p_j$ , los factores respectivos  $(1 - c_i z^{-1})$  y  $(1 - p_j z^{-1})$  se anularían y, por tanto, los órdenes del numerador y el denominador de  $X(z)$  en (132) se decrementarían en una unidad.

Para facilitar la comprensión de las particularidades de esta expresión genérica en forma de señal racional (cociente de polinomios), pongamos ahora un ejemplo arbitrario de señal  $X(z)$ :

$$X(z) = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2} + \frac{1}{3}z^{-3}}{1 - \frac{7}{12}z^{-1} - \frac{11}{12}z^{-2} + \frac{7}{12}z^{-3} - \frac{1}{12}z^{-4}} \quad (135)$$

Ahora, a fin de expresar esta  $X(z)$  según la forma definida en (132), procedemos a factorizarla. Para ahorrarnos los cálculos, podemos hacer uso de la **función `tf2zpk`** de MATLAB, la cual, precisamente, **calcula los valores de los  $c_i$ ,  $p_i$  y  $G$  a partir de los coeficientes  $b_i$  y  $a_i$**  (para más detalles, se recomienda consultar el `help` de la función):

```
>> B = [1/2 -1/3 -1/2 1/3]; % Vector fila: coeficientes del numerador
>> A = [1 -7/12 -11/12 7/12 -1/12]; % Vector fila: denominador
>> [c,p,G] = tf2zpk(B,A)
c =
    0
 -1.0000
  1.0000
  0.6667
p =
 -1.0000
  1.0000
  0.3333
  0.2500
G =
  0.5000
```

Así, la factorización de  $X(z)$  da lugar a la siguiente expresión:

$$X(z) = \frac{1}{2} \frac{(1+z^{-1})(1-z^{-1})(1-\frac{2}{3}z^{-1})}{(1+z^{-1})(1-z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-1})} \quad (136)$$

Se observa que los valores  $z = \pm 1$  son ceros tanto del numerador como del denominador de  $X(z)$ . Por tanto, sus factores respectivos son simplificables, de modo que:

$$X(z) = \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{2}{3}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})(1 - \frac{1}{4}z^{-1})} \quad (137)$$

Una vez simplificada, si se quiere volver a recuperar la expresión de  $X(s)$  en su forma no factorizada, no hay más que desarrollar los productos de sus factores tanto en numerador como denominador. Análogamente, la **función `zp2tf`** de MATLAB permite ahorrarse estos cálculos, pues **calcula los valores de los coeficientes  $b_i$  y  $a_i$  a partir de los ceros, los polos y el factor de ganancia** (para más detalles, se recomienda consultar el `help` de la función):

```
>> c = [2/3;0]; % Vector columna: los ceros de X(z)
>> p = [1/3;1/4]; % Vector columna: los polos de X(z)
>> G = 1/2; % Factor de ganancia de X(z)
>> [B,A] = zp2tf(c,p,G)
B =
```



$$A = \begin{bmatrix} 0.5000 & -0.3333 & 0 \\ 1.0000 & -0.5833 & 0.0833 \end{bmatrix}$$

Por tanto:

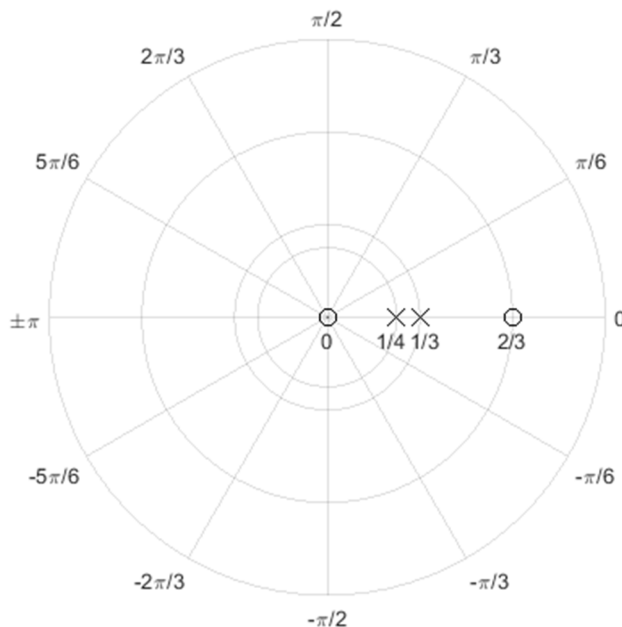
$$X(z) = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - \frac{7}{12}z^{-1} + \frac{1}{12}z^{-2}} \quad (138)$$

En todo caso, si nos fijamos en la expresión factorizada de (137), observamos que:

- El factor de ganancia de  $X(z)$  es igual a  $1/2$ .
- Los ceros de  $X(z)$  son:  $c_1 = 2/3$  y  $c_2 = 0$  (este último debido a que el orden del denominador es superior en una unidad al del numerador).
- Los polos de  $X(z)$  son:  $p_1 = 1/3$  y  $p_2 = 1/4$ .

Por tanto, el diagrama de polos y ceros de  $X(z)$  es el siguiente:

Figura 16. Diagrama de polos y ceros con dos ceros en  $z = 2/3$  y  $z = 0$  y dos polos en  $z = 1/3$  y  $z = 1/4$



## 4.2. Propiedades de la ROC

Continuando con el ejemplo iniciado en la ecuación (135) del apartado anterior, es interesante notar que hemos partido directamente de una expresión dada para  $X(z)$ . Y de ello se deriva algo importante: de entrada, no sabemos cuál es la ROC de esta  $X(z)$ , ya que no hemos partido de ninguna  $x[n]$  y, por

tanto, no hemos tenido que resolver el sumatorio de la ecuación de análisis de la transformada z para obtener  $X(z)$ . Al no haber calculado el sumatorio, desconocemos sus condiciones de convergencia, que son precisamente lo que determina la ROC de  $X(z)$ .

Este hecho conlleva, además, otra consecuencia interesante: sin conocer la ROC de  $X(z)$ , no es posible calcular la transformada inversa y obtener  $x[n]$ , puesto que, recordemos, la transformada z de una señal no consiste únicamente en la expresión de  $X(z)$ , sino en la expresión  $X(z)$  y su ROC. Así, desconocer la ROC de  $X(z)$  es desconocer parte de la información contenida en  $x[n]$ .

Puesto que las señales exponenciales complejas son base generadora del espacio de las señales analógicas, la transformada z es reversible: dada una señal temporal  $x[n]$ , su transformada z directa, si es que existe, da lugar de forma unívoca a su señal  $X(z)$  asociada; y, en sentido opuesto, dada una  $X(z)$ , su transformada z inversa da lugar de forma unívoca a su señal  $x[n]$  asociada. Es decir, que **señales temporales diferentes dan lugar a señales transformadas diferentes y viceversa**.

Ahora bien, **una señal transformada  $X(z)$  es su expresión algebraica más su ROC**. Por tanto, las transformadas z de dos señales diferentes  $x_1[n]$  y  $x_2[n]$  son siempre dos señales transformadas diferentes, pero es perfectamente posible que las expresiones algebraicas de  $X_1(z)$  y  $X_2(z)$  sean exactamente iguales ( $X_1(z) = X_2(z) = X(z)$ ) y que la única cosa en la que se diferencien sea en sus respectivas ROC ( $R_1 \neq R_2$ ):

$$x_1[n] \xleftrightarrow{Z} X(z), \quad R_1 \quad (139)$$

$$x_2[n] \xleftrightarrow{Z} X(z), \quad R_2 \quad (140)$$

Por lo tanto, sucede que **una misma expresión algebraica de  $X(z)$  puede dar lugar a diferentes señales temporales dependiendo de cuál sea su ROC**.

Sin embargo, lo cierto es que, en realidad, **el diagrama de polos y ceros de  $X(z)$  ya indica cómo podría ser la ROC de  $X(z)$  y, por tanto, qué posibles señales  $x[n]$  podrían ser su transformada inversa**. Así, si tomamos de la figura 16 el diagrama de polos y ceros de la señal  $X(z)$  expresada en (138) y nos preguntamos cuál podría ser la señal temporal  $x[n]$  resultante de su transformada z inversa, vemos que:

1) La señal  $x[n]$  no podría ser de longitud finita, pues la ROC de su  $X(z)$  sería todo el plano  $z$  y esto es imposible en este caso, puesto que  $X(z)$  tiene dos polos y, como sabemos, no es posible que un polo esté incluido en el interior de una ROC.

2) La señal  $x[n]$  podría ser infinita orientada a la derecha, pues la ROC de  $X(z)$  podría ser el exterior de la circunferencia  $|z|=1/3$ , tal y como se ilustra en la figura 17a:

$$x_1[n] \xleftrightarrow{Z} X(z), \quad |z| > 1/3 \quad (141)$$

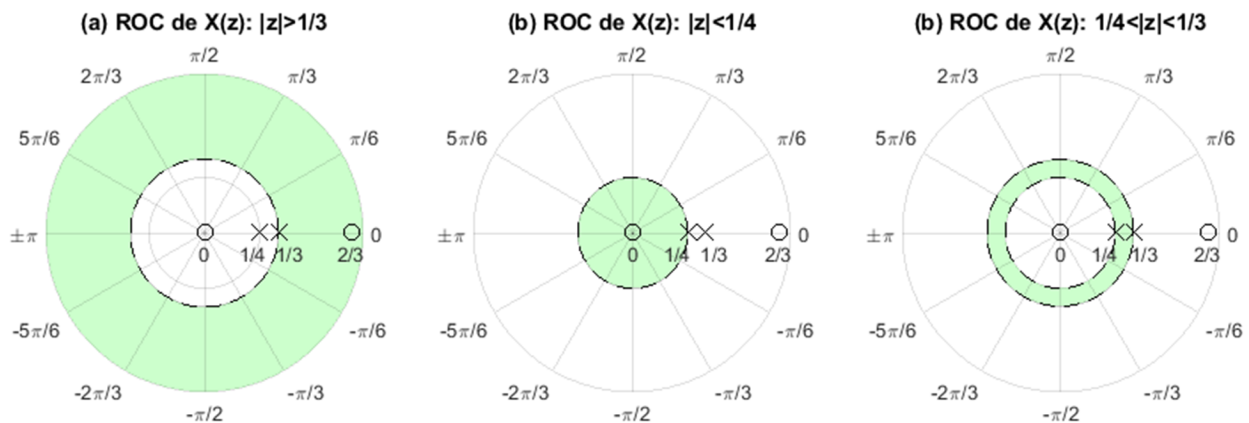
3) La señal  $x[n]$  podría ser infinita orientada a la izquierda, pues la ROC de  $X(z)$  podría ser el interior de la circunferencia  $|z|=1/4$ , tal y como se ilustra en la figura 17b:

$$x_2[n] \xleftrightarrow{Z} X(z), \quad |z| < 1/4 \quad (142)$$

4) La señal  $x[n]$  podría ser infinita orientada a ambos lados, pues la ROC de  $X(z)$  podría ser el anillo comprendido entre las circunferencias  $|z|=1/4$  y  $|z|=1/3$ , tal y como se ilustra en la figura 17c:

$$x_3[n] \xleftrightarrow{Z} X(z), \quad 1/4 < |z| < 1/3 \quad (143)$$

Figura 17. Posibles ROC de una  $X(z)$  con dos polos en  $z=1/3$  y  $z=1/4$



(a)  $x[n]$  es infinita orientada a la derecha. (b)  $x[n]$  es infinita orientada a la izquierda. (c)  $x[n]$  es infinita orientada a ambos lados

Estas consideraciones, realizadas a partir de un ejemplo concreto, sirven para ilustrar los siguientes postulados generales:

#### Propiedades generales de la ROC de una señal $X(z)$ racional

Sea  $x[n]$  una señal digital cuya transformada  $z$ ,  $X(z)$ , es una señal racional.

Puesto que, por definición, una ROC no puede contener ningún polo, **la ROC de  $X(z)$  está limitada por polos de  $X(z)$  o abarca todo el plano  $z$**  (con las posibles excepciones de los valores  $z = 0$  y  $z \rightarrow \infty$ ), por lo tanto:

- Si  $x[n]$  es una señal **finita**,  $X(z)$  no tiene polos y su ROC es **todo el plano  $z$**  (con las posibles excepciones de los valores  $z = 0$  y  $z \rightarrow \infty$ ).
- Si  $x[n]$  es una señal **infinita orientada a la derecha**, la ROC de  $X(z)$  es **el exterior de la circunferencia de radio igual al módulo del polo de  $X(z)$  de mayor módulo** (un polo de  $X(z)$  cuyo módulo es mayor o igual que el módulo de cualquier otro polo); o sea, un polo de  $X(z)$  cuya distancia al origen de coordenadas del plano  $z$  es mayor o igual que la de cualquier otro polo.
- Si  $x[n]$  es una señal **infinita orientada a la izquierda**, la ROC de  $X(z)$  es **el interior de la circunferencia de radio igual al módulo del polo de  $X(z)$  de menor módulo** (un polo de  $X(z)$  cuyo módulo es menor o igual que el módulo de cualquier otro polo); o sea, un polo de  $X(z)$  cuya distancia al origen de coordenadas del plano  $z$  es menor o igual que la de cualquier otro polo.
- Si  $x[n]$  es una señal **infinita orientada a ambos lados**, la ROC de  $X(z)$  es **el anillo comprendido entre dos circunferencias de radios respectivamente iguales a los módulos de dos polos consecutivos de  $X(z)$**  (dos polos de  $X(z)$  tales que sus módulos son o bien simultáneamente mayores o bien simultáneamente menores que el módulo de cualquier otro polo); o sea, dos polos de  $X(z)$  tales que no hay ningún polo cuyo módulo sea, a la vez, mayor que el de uno de ellos y menor que del otro.

#### 4.3. Estrategia de cálculo de la transformada $z$ inversa

Llegados a este punto, ya estamos en condiciones de concretar el procedimiento de cálculo de la transformada  $z$  inversa, de un modo tal que nos evite el tener que resolver la integral de la ecuación de síntesis de la transformada  $z$ . Así pues, para calcular la transformada inversa de una  $X(z)$  dada, seguiremos la siguiente estrategia, la cual es aplicable, en general, al cálculo de cualquier transformada  $z$  inversa de cualquier  $X(z)$  racional (cociente de polinomios):

### Estrategia de cálculo de la transformada z inversa de una $X(z)$ racional

1) Se obtiene la **expresión factorizada simplificada de  $X(z)$**

$$X(z) = G \frac{\prod_{i=1}^M (1 - c_i z^{-1})}{\prod_{i=1}^N (1 - p_i z^{-1})} = G \frac{(1 - c_1 z^{-1}) \dots (1 - c_M z^{-1})}{(1 - p_1 z^{-1}) \dots (1 - p_N z^{-1})} \quad (144)$$

2) Se descompone esta expresión en  **$L$  fracciones simples**:

$$X(z) = \sum_{i=1}^L X_i(z) = X_1(z) + X_2(z) + \dots + X_L(z) \quad (145)$$

3) Se determina **una ROC para cada fracción simple por separado, de modo tal que la intersección de todas ellas no sea el conjunto vacío**:

$$\left. \begin{array}{l} X_1(z), \quad R_1 \\ X_2(z), \quad R_2 \\ \vdots \\ X_L(z), \quad R_L \end{array} \right\} \Rightarrow R = R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_L \neq \emptyset \quad (146)$$

allí donde, por la propiedad de linealidad,  **$R$  es la ROC de  $X(z)$** .

4) Se calcula la **transformada z inversa de cada fracción simple por separado**:

$$\begin{aligned} x_1[n] &= Z^{-1}\{X_1(z), R_1\} \\ x_2[n] &= Z^{-1}\{X_2(z), R_2\} \\ &\vdots \\ x_L[n] &= Z^{-1}\{X_L(z), R_L\} \end{aligned} \quad (147)$$

5) Finalmente, y de nuevo por la propiedad de linealidad, **la transformada z inversa de  $X(z)$  es el resultado de la suma de las transformadas inversas de cada fracción simple**:

$$x[n] = Z^{-1}\{X(z), R\} = x_1[n] + x_2[n] + \dots + x_L[n] \quad (148)$$

La clave de esta estrategia está realmente en el paso 2, puesto que, por ser  $X(z)$  una señal racional de la forma expresada en (144), **las fracciones simples  $X_1(z)$ ,  $X_2(z)$ , etc., son siempre transformadas z conocidas de señales básicas**, identificables, por tanto, en la tabla 1 detallada del subapartado 2.7

de este mismo módulo. Gracias a esto, **no es necesario calcular las transformadas inversas del paso 4**, ya que son transformadas conocidas de señales conocidas.

El único punto crítico se da en el paso 3, puesto que **la naturaleza de las ROC de las fracciones simples determinará la forma de  $x[n]$** . Tanto es así, que, si no fuese posible definir  $R_1$ ,  $R_2$ , etc., de modo tal que su intersección no sea un conjunto vacío, entonces  $x[n]$  simplemente no existiría (no habría ninguna señal temporal  $x[n]$  cuya transformada  $z$  fuese  $X(z)$ ).

Entonces, respecto del paso 2, es decir, respecto de la descomposición de  $X(z)$  en fracciones simples, a continuación vamos a asumir el escenario más sencillo posible, en el cual se dan las dos circunstancias siguientes:

- El orden del polinomio del denominador de  $X(z)$  es mayor que el orden del polinomio del numerador; es decir, que  $N > M$ .
- Todos los polos de  $X(z)$  son de multiplicidad 1; es decir, que  $p_i \neq p_j, \forall i \neq j$ .

Si no se dan estas dos circunstancias, el cálculo de la descomposición de  $X(z)$  en fracciones simples es más laborioso, pero la estrategia general aquí planteada no se ve afectada por ello.

Así pues, **si  $N > M$  y si  $p_i \neq p_j, \forall i \neq j$ , sucede que hay tantas fracciones simples como polos tenga  $X(z)$  (o sea, que  $L = N$ )**, siendo cada una de ellas de la forma siguiente:

$$X_i(z) = \frac{A_i}{1 - p_i z^{-1}}, \quad \forall i \in \{1, \dots, L\} \quad (149)$$

siendo  $X_i(z)$  la fracción simple  $i$ -ésima en que se descompone  $X(z)$  y donde la constante  $A_i$  es el resultado de evaluar en  $z = p_i$  el producto de  $X(z)$  por el factor  $(1 - p_i z^{-1})$ :

$$A_i = \left[ (1 - p_i z^{-1}) X(z) \right]_{z=p_i}, \quad \forall i \in \{1, \dots, L\} \quad (150)$$

Por tanto, aplicando (149) en (145), la descomposición en fracciones simples de  $X(z)$  es:

$$X(z) = \sum_{i=0}^N \frac{A_i}{1 - p_i z^{-1}} = \frac{A_1}{1 - p_1 z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - p_2 z^{-1}} + \dots + \frac{A_L}{1 - p_L z^{-1}} \quad (151)$$

#### Ved también

Al final de este apartado, en el subapartado 4.3.1, se detalla el procedimiento de descomposición en fracciones simples más general posible (es decir, sin asumir estas dos restricciones) y se explica cómo es posible resolver todo el cálculo de una tacada mediante el uso de la función `residuez` de MATLAB.

Finalmente, la forma de la transformada z inversa de cada una de las fracciones simples de (151) dependerá de cómo se defina su ROC. Si atendemos a las transformadas típicas mostradas en la tabla 1 (subapartado 2.7 de este mismo módulo) y a las propiedades de la ROC de señales racionales (al final del subapartado 4.2, en este mismo apartado), vemos que:

Si  $R_i$  es  $|z| > |p_i|$  (o sea, el exterior de la circunferencia de radio  $|p_i|$ ), entonces:

$$x_i[n] = Z^{-1}\{X_i(z), R_i\} = A_i p_i^n u[n] \quad (152)$$

Si  $R_i$  es  $|z| < |p_i|$  (o sea, el interior de la circunferencia de radio  $|p_i|$ ), entonces:

$$x_i[n] = Z^{-1}\{X_i(z), R_i\} = -A_i p_i^n u[-n-1] \quad (153)$$

Por lo tanto, si volvemos ahora a la ecuación (137) y recuperamos la señal  $X(z)$  del ejemplo usado a lo largo de los dos apartados anteriores, vemos que podemos descomponerla en dos fracciones simples, de acuerdo con lo indicado en (151):

$$X(z) = \frac{A_1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \quad (154)$$

A continuación, y usando la expresión de  $X(z)$  de la ecuación (137), calculamos los valores de  $A_1$  y  $A_2$  según (150):

$$\begin{aligned} A_1 &= \left[ \left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right) \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{2}{3}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)} \right]_{z=\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1 - \frac{2}{3}z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \right]_{z=\frac{1}{3}} = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1 - \frac{2}{3} \cdot 3}{1 - \frac{1}{4} \cdot 3} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{-1}{\frac{1}{4}} \right) = -2 \end{aligned} \quad (155)$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \left[ \left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right) \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{2}{3}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)} \right]_{z=\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1 - \frac{2}{3}z^{-1}}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \right]_{z=\frac{1}{4}} = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1 - \frac{2}{3} \cdot 4}{1 - \frac{1}{3} \cdot 4} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{-\frac{5}{3}}{-\frac{1}{3}} \right) = \frac{5}{2} \end{aligned} \quad (156)$$

Por tanto:

$$X(z) = \underbrace{-2 \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}}_{X_1(z)} + \underbrace{\frac{5}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}}_{X_2(z)} \quad (157)$$

Siendo  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R$  las ROC de  $X_1(z)$ ,  $X_2(z)$  y  $X(z)$ , respectivamente, vemos que hay tres posibilidades a la hora de garantizar que  $R = R_1 \cap R_2 \neq \emptyset$  (es decir, para que exista la transformada z inversa de  $X(z)$ ), las cuales se corresponden, respectivamente, con los tres escenarios planteados en las ecuaciones (141), (142) y (143).

En primer lugar, podemos determinar que  $R_1$  sea  $|z| > 1/3$  y  $R_2$  sea  $|z| > 1/4$ , en cuyo caso, la ROC de  $X(z)$  sería la mostrada en la figura 17a:

$$R = R_1 \cap R_2 = \left\{ |z| > \frac{1}{3} \right\} \cap \left\{ |z| > \frac{1}{4} \right\} = \left\{ |z| > \frac{1}{3} \right\} \quad (158)$$

Así, las transformadas inversas de  $X_1(z)$  y  $X_2(z)$  serían, de acuerdo con (152):

$$x_1[n] = Z^{-1} \left\{ -2 \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}, |z| > \frac{1}{3} \right\} = -2 \left( \frac{1}{3} \right)^n u[n] \quad (159)$$

$$x_2[n] = Z^{-1} \left\{ \frac{5}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}, |z| > \frac{1}{4} \right\} = \frac{5}{2} \left( \frac{1}{4} \right)^n u[n] \quad (160)$$

Por tanto, de acuerdo con (148), la transformada inversa de  $X(z)$  sería una señal infinita orientada a la derecha:

$$x[n] = Z^{-1} \left\{ X(z), |z| > \frac{1}{3} \right\} = \left( \frac{5}{2} \left( \frac{1}{4} \right)^n - 2 \left( \frac{1}{3} \right)^n \right) u[n] \quad (161)$$

En segundo lugar, podemos determinar que  $R_1$  sea  $|z| < 1/3$  y  $R_2$  sea  $|z| < 1/4$ , en cuyo caso, la ROC de  $X(z)$  sería la mostrada en la figura 17b:

$$R = R_1 \cap R_2 = \left\{ |z| < \frac{1}{3} \right\} \cap \left\{ |z| < \frac{1}{4} \right\} = \left\{ |z| < \frac{1}{4} \right\} \quad (162)$$

Así, las transformadas inversas de  $X_1(z)$  y  $X_2(z)$  serían, de acuerdo con (153):

$$x_1[n] = Z^{-1} \left\{ -2 \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}, |z| < \frac{1}{3} \right\} = 2 \left( \frac{1}{3} \right)^n u[-n-1] \quad (163)$$

$$x_2[n] = Z^{-1} \left\{ \frac{5}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}, |z| < \frac{1}{4} \right\} = -\frac{5}{2} \left( \frac{1}{4} \right)^n u[-n-1] \quad (164)$$

Por tanto, la transformada inversa de  $X(z)$  sería una señal infinita orientada a la izquierda:

$$x[n] = Z^{-1} \left\{ X(z), |z| < \frac{1}{4} \right\} = \left( 2 \left( \frac{1}{3} \right)^n - \frac{5}{2} \left( \frac{1}{4} \right)^n \right) u[n] \quad (165)$$



Y, en tercer lugar, podemos determinar que  $R_1$  sea  $|z| < 1/3$  y  $R_2$  sea  $|z| > 1/4$ , en cuyo caso, la ROC de  $X(z)$  sería la mostrada en la figura 17c:

$$R = R_1 \cap R_2 = \left\{ |z| < \frac{1}{3} \right\} \cap \left\{ |z| > \frac{1}{4} \right\} = \left\{ \frac{1}{4} < |z| < \frac{1}{3} \right\} \quad (166)$$

Así, las transformadas inversas de  $X_1(z)$  y  $X_2(z)$  serían, según (153) y (152), respectivamente:

$$x_1[n] = Z^{-1} \left\{ -2 \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}, |z| < \frac{1}{3} \right\} = 2 \left( \frac{1}{3} \right)^n u[-n-1] \quad (167)$$

$$x_2[n] = Z^{-1} \left\{ \frac{5}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}, |z| > \frac{1}{4} \right\} = \frac{5}{2} \left( \frac{1}{4} \right)^n u[n] \quad (168)$$

Por tanto, la transformada inversa de  $X(z)$  sería una señal infinita orientada a ambos lados:

$$x[n] = Z^{-1} \left\{ X(z), \quad \frac{1}{4} < |z| < \frac{1}{3} \right\} = 2 \left( \frac{1}{3} \right)^n u[-n-1] + \frac{5}{2} \left( \frac{1}{4} \right)^n u[n] \quad (169)$$

#### 4.3.1. Generalización de la descomposición en fracciones simples

La forma general de la ecuación (145), sin asumir ninguna restricción respecto de los valores de  $M$  y  $N$ , ni respecto de la multiplicidad de los polos de  $X(z)$ , es la siguiente:

$$X(z) = \sum_{i=0}^{M-N} d_i z^{-i} + \sum_{i \notin S} \frac{A_i}{1 - p_i z^{-1}} + \sum_{j=s_1}^{s_K} \sum_{i=1}^{m_j} \frac{C_{ji}}{(1 - p_j z^{-1})^i} \quad (170)$$

El primer término de (170) es el **cociente de la división entre los polinomios  $B(z)$  y  $A(z)$**  (el numerador y el denominador de  $X(z)$ ). Se trata de un polinomio en  $z$  compuesto por  $M - N + 1$  monomios de coeficientes  $d_i$  ( $\forall i \in \{0, \dots, M\}$ ):

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = D(z) + \frac{R(z)}{A(z)} \quad \Rightarrow \quad D(z) = \sum_{i=0}^{M-N} d_i z^{-i} \quad (171)$$

Este polinomio  $D(z)$  solo existe si  $M \geq N$ , o sea, si el **orden del denominador de  $X(z)$  no es superior al del numerador**. En tal caso, se calcula la división entre  $B(z)$  y  $A(z)$  hasta obtener un resto  $R(z)$  tal que sea de orden inferior a  $A(z)$ , lo cual garantiza que en  $R(z)/A(z)$  sí se cumplirá siempre la restricción de

que el orden del denominador sea superior al del numerador. Así,  $D(z)$  es el cociente resultante de dicha división y los coeficientes  $d_i$  del primer término de (170) son los coeficientes del polinomio  $D(z)$ , cuyo orden es  $M - N + 1$ .

El segundo término de (170) contiene **las fracciones simples correspondientes a los polos de  $X(z)$  de multiplicidad 1**. Se observa que los índices de este sumatorio están restringidos a  $i \notin S$ . El conjunto  $S$  contiene los índices  $(s_1, \dots, s_K)$  de los  $K$  polos de  $X(z)$  cuya multiplicidad es mayor que 1 (la multiplicidad indica cuántos polos de  $X(z)$  coinciden para un mismo valor de  $z$ ). Así, puesto que este sumatorio solo indexa los polos de  $X(z)$  cuyos índices no pertenecen a  $S$ , cada una de estas fracciones simples se corresponde con un polo de  $X(z)$  de multiplicidad 1. Además, los coeficientes  $A_i$  se calculan sin más, según (150).

En general, el valor de  $K$  siempre estará comprendido entre  $K = 0$  (todos polos de  $X(z)$  son de multiplicidad 1) y  $K = N$  (todos los polos de  $X(z)$  son de multiplicidad mayor que 1), de modo que el segundo término de (170) siempre contendrá  $N - K$  fracciones simples.

Y, finalmente, el tercer término de (170) contiene **las fracciones simples correspondientes a los polos de  $X(z)$  cuya multiplicidad es mayor que 1**. El sumatorio en  $j$  recorre los índices de estos polos (o sea, los índices  $s_1, \dots, s_K$  contenidos en el conjunto  $S$ ) y, para cada polo  $p_j$ , el sumatorio en  $i$  incorpora  $m_j$  fracciones simples, allí donde  $m_j$  es **la multiplicidad del polo  $p_j$**  ( $m_j > 1, \forall j \in S$ ). Se observa que el exponente al que está elevado el denominador de las fracciones simples asociadas a cada polo  $p_j$  se va incrementando desde 1 hasta  $m_j$ :

$$\sum_{i=1}^{m_j} \frac{C_i}{(1 - p_j z^{-1})^i} = \frac{C_1}{1 - p_j z^{-1}} + \frac{C_2}{(1 - p_j z^{-1})^2} + \dots + \frac{C_{m_j}}{(1 - p_j z^{-1})^{m_j}} \quad (172)$$

Además, los coeficientes  $C_i$  correspondientes a las  $m_j$  fracciones simples asociadas a cada polo  $p_j$  se calculan de acuerdo con la siguiente expresión:

$$C_i = \frac{1}{(m_j - i)! (-p_j)^{m_j - i}} \left[ \frac{d^{m_j - i}}{d\omega^{m_j - i}} ((1 - p_j z^{-1})^{m_j} X(\omega^{-1})) \right]_{\omega = p_j^{-1}} \quad (173)$$

Es decir, para calcular el coeficiente  $C_i$  del polo  $p_j$ : se evalúa  $X(z = \omega^{-1})$ , se multiplica por  $(1 - p_j z^{-1})^{m_j}$ , se deriva  $m_j - i$  veces respecto de  $\omega$ , se calcula el valor de la señal resultante para  $\omega = p_j^{-1}$  y se divide entre  $(m_j - i)! (-p_j)^{m_j - i}$ .

Así pues, el tercer término de (170) incluye un total de  $\prod_{j=s_1}^{s_K} m_j$  fracciones simples.

Entonces, una vez calculados los coeficientes  $d_i$ ,  $A_i$  y  $C_i$  de la ecuación (170), se ha completado el paso 2 de la estrategia de cálculo de la transformada z inversa de  $X(z)$ . El resto de pasos (del 3 al 5) se realizan exactamente igual que en el caso simple (en el que se cumplen las restricciones de que  $M > N$  y de que todos los polos son de multiplicidad 1):

En primer lugar, la transformada z inversa de  $D(z)$  no presenta ninguna dificultad, pues se trata de un polinomio finito como el especificado en (129). Así, aplicando sin más (128):

$$d[n] = Z^{-1}\{D(z)\} = Z^{-1}\left\{\sum_{i=0}^{M-N} d_i z^{-i}\right\} = \sum_{i=0}^{M-N} d_i \delta[n-i] \quad (174)$$

En segundo lugar, la transformada z inversa de cada fracción simple del segundo término de (170) se calcula sin más según lo establecido en (152)-(153).

Y, en tercer lugar, la transformada z inversa de cada fracción simple del tercer término de (170) se calcula de forma análoga a lo establecido en (152)-(153), es decir, a dada cada fracción simple de la forma:

$$X_i(z) = \frac{C_i}{(1 - p_j z^{-1})^i} \quad (175)$$

se le asocia una ROC  $R_i$  y su transformada z inversa se obtiene según el siguiente criterio:

Si  $R_i$  es  $|z| > |p_j|$  (o sea, el exterior de la circunferencia de radio  $|p_j|$ ), entonces:

$$x_i[n] = Z^{-1}\{X_i(z), R_i\} = C_i \binom{n+i}{i} p_j^n u[n] \quad (176)$$

Si  $R_i$  es  $|z| < |p_j|$  (o sea, el interior de la circunferencia de radio  $|p_j|$ ), entonces:

$$x_i[n] = Z^{-1}\{X_i(z), R_i\} = -C_i \binom{n+i}{i} p_j^n u[-n-1] \quad (177)$$

Y hasta aquí la explicación completa de la generalización del proceso de descomposición en fracciones simples de  $X(z)$ . Sabido todo esto, obtener la transformada z inversa de cualquier señal racional  $X(z)$  consiste simplemente en aplicar sin más la estrategia aquí descrita y realizar los cálculos que correspondan. Ciertamente, realizar todo estos cálculos a mano puede ser muy laborioso –especialmente, los tocantes a los coeficientes de las fracciones simples que se calculan en el paso 2.

En este sentido, resulta de una gran utilidad la **función `residuez` de MATLAB**, la cual, partiendo de los coeficientes  $b_i$  y  $a_i$  de los polinomios del numerador y denominador de  $X(z)$ , respectivamente, calcula de una sola tacada:

- Los valores de los polos de  $X(z)$ :  $p_i$ .
- Los valores de los coeficientes  $d_i$ ,  $A_i$  y  $C_i$  de la ecuación (170).

Es decir, función `residuez` implementa en un único comando los pasos 1 (factorización de  $X(z)$ ) y 2 (descomposición en fracciones simples) de nuestra estrategia de cálculo de la transformada z inversa. Tras aplicar esta función, solo queda asignar la ROC de cada fracción simple (paso 3), obtener la transformada z inversa de cada fracción simple (paso 4) y construir  $x[n]$  sumando las señales individuales obtenidas en el paso anterior (paso 5).

A continuación, se plantea un pequeño ejercicio a modo de ejemplo para ilustrar tanto el caso general de descomposición en fracciones simples de  $X(z)$ , como el uso de la función `residuez` para facilitar el cálculo de la transformada z inversa (en todo caso, se recomienda consultar el `help` de la función para una explicación más detallada).

### Ejemplo 2

Sea la siguiente señal:

$$X(z) = \frac{1 - 2z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2} + z^{-3} + \frac{1}{16}z^{-4} - \frac{1}{8}z^{-5}}{1 - z^{-1} - z^{-2} + z^{-3}} \quad (178)$$

Se sabe que  $X(z) = Z\{x[n]\}$  y que  $x[n] = 0, \forall n < 0$ . Se pide obtener  $x[n]$ .

### Solución

Debido a que  $x[n] = 0, \forall n < 0$ , está claro que  $x[n]$  no puede ser ni una señal infinita orientada a la izquierda ni una señal infinita orientada a ambos lados. Así, o es una señal finita, o es una señal infinita orientada a la derecha. Aprovecharemos esta información llegado el momento en el proceso de cálculo de la transformada z inversa de  $X(z)$ , puesto que:

$$x[n] = Z^{-1}\{X(z), \text{ROC}\} \quad (179)$$

Entonces, puesto que  $X(z)$  es una señal racional con la forma de un cociente de polinomios, el cálculo de (179) pasa por aplicar la estrategia descrita en el subapartado 4.3 de este mismo apartado. Además, se observa que el numerador de  $X(z)$  es de orden  $M = 5$ ,

mientras que el numerador es de orden  $N = 3$ . Por tanto, habrá que aplicar la versión general de la descomposición en fracciones simples de  $X(z)$  (no sabemos aún si habrá algún polo de multiplicidad mayor que 1, pero sí que  $M \geq N$ ).

Así pues, aplicamos sin más la función `residuez` para factorizar  $X(z)$  y descomponerla en fracciones simples:

```
>> B = [1 -2 -1/2 1 1/16 -1/8]; % Vector fila: numerador de X(z)
>> A = [1 -1 -1 1]; % Vector fila: denominador de X(z)
>> [AC,p,d] = residuez(B,A)
AC =
    0.0469
   -0.2813
    0.4219
p =
    1.0000
    1.0000
   -1.0000
d =
    0.8125   -0.0625   -0.1250
```

Se observa lo siguiente:

- Los valores de los polos de  $X(z)$  son los indicados en el vector `p`. Por tanto, hay un polo con multiplicidad 1 en  $z = -1$  y un polo con multiplicidad 2 (o sea, dos polos) en  $z = 1$ .
- Los valores de los coeficientes  $d_i$  son los indicados en el vector `d`. Por lo tanto,  $d_1 = 0.8125 = 13/16$ ,  $d_2 = -0.0625 = -1/16$  y  $d_3 = -0.125 = -1/8$ .
- Los valores de los coeficientes  $A_i$  y  $C_i$  son los indicados en el vector `AC`, en correspondencia con el orden de los polos en `p`. Por tanto,  $C_1 = 0.0469 = 3/64$ ,  $C_2 = -0.2813 = -9/32$  y  $A_1 = 0.4219 = 27/64$ .

Así pues, la descomposición en fracciones simples de  $X(z)$  es la siguiente:

$$X(z) = \frac{13}{16} - \frac{1}{16}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2} + \frac{27}{64} \frac{1}{1+z^{-1}} + \frac{3}{64} \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{9}{32} \frac{1}{(1-z^{-1})^2} \quad (180)$$

Y ahora es el momento de asignar la ROC de cada una de las tres fracciones simples obtenidas. Como hemos comentado al principio, sabemos que  $x[n]$  es una señal finita o una señal infinita orientada a la derecha, de modo que, visto que  $X(z)$  presenta tres polos en lugares distintos a  $z = 0$  o  $z \rightarrow \infty$ , ya vemos que  $x[n]$  no puede ser finita, puesto que ello implicaría que la ROC de  $X(z)$  abarcara todo el plano  $z$ , cosa imposible con esos tres polos.

Por tanto,  $x[n]$  es una señal infinita orientada a la derecha y la ROC de  $X(z)$  es el exterior de la circunferencia de radio igual al polo de  $X(z)$  de mayor módulo; o sea, la ROC de  $X(z)$  es  $|z| > 1$ . De este modo, las ROC de las tres fracciones simples en las que está descompuesta  $X(z)$  serán todas  $|z| > 1$ :

$$Z^{-1}\left\{\frac{27}{64} \frac{1}{1+z^{-1}}, |z| > 1\right\} = \frac{27}{64}(-1)^n u[n] \quad (181)$$

$$Z^{-1}\left\{\frac{3}{64} \frac{1}{1-z^{-1}}, |z| > 1\right\} = \frac{3}{64} u[n] \quad (182)$$

$$Z^{-1}\left\{-\frac{9}{32} \frac{1}{(1-z^{-1})^2}, |z| > 1\right\} = -\frac{9}{32}(n+1)u[n] \quad (183)$$

Así, finalmente, completamos la transformada  $z$  inversa de  $X(z)$  y obtenemos  $x[n]$ :

$$\begin{aligned}
 x[n] &= Z^{-1}\{X(z), |z| > 1\} = \\
 &= \frac{1}{16}(13\delta[n] - \delta[n-1] - 2\delta[n-2]) + \frac{1}{32}\left(\frac{3}{2} + \frac{27}{2}(-1)^n - 9(n+1)\right)u[n]
 \end{aligned}
 \tag{184}$$

## 5. Caracterización de sistemas LIT digitales mediante la transformada z

Una vez presentadas todas las herramientas de cálculo y representación gráfica que son necesarias para la caracterización de señales analógicas en el dominio transformado z, en este último apartado del módulo se estudia cómo aplicar todas estas herramientas para caracterizar los sistemas LIT digitales en dicho dominio.

Como sabemos, todo sistema LIT está completa y enteramente definido en su respuesta impulsional. Así, la caracterización de un sistema LIT digital en el dominio z va a estar siempre basada en la *función de transferencia* del sistema, la cual va a ser definida en el subapartado 5.1 como la transformada z de su respuesta impulsional.

A partir de ahí, la función de transferencia va a servir para, ya en el subapartado 5.2, calcular la salida del sistema ante cualquier entrada, conocer las propiedades del sistema y caracterizar los sistemas globales resultantes de la asociación de varios sistemas LIT digitales.

Finalmente, en el subapartado 5.3, se estudia la caracterización en el dominio transformado z de los sistemas LIT digitales regidos por una relación entrada-salida con la forma de ecuación en diferencias lineal de coeficientes constantes, su relación con la función de transferencia del sistema y, sobre todo, cómo esta relación sirve para poder obtener la respuesta impulsional del sistema a partir de su relación entrada-salida.

### 5.1. Función de transferencia de un sistema LIT digital

Sean  $S$  un sistema LIT digital,  $x[n]$  su señal de entrada,  $y[n]$  su señal de salida y  $h[n]$  su respuesta impulsional. Como sabemos, estas tres señales están relacionadas entre sí mediante la operación convolución:

$$y[n] = x[n] * h[n] \quad (185)$$

Si aplicamos la transformada z a ambos lados de la igualdad en la ecuación (185), obtenemos lo siguiente:

$$Z\{y[n]\} = Z\{x[n] * h[n]\} \quad (186)$$

Por la propiedad de la convolución temporal de la transformada z definida en la ecuación (121), de (186) se sigue que:

$$\frac{Z\{y[n]\}}{Y(z)} = \frac{Z\{x[n]\}}{X(z)} \frac{Z\{h[n]\}}{H(z)} \quad (187)$$

$$\boxed{Y(z) = X(z)H(z)} \quad (188)$$

siendo  $X(z)$ ,  $Y(z)$  y  $H(z)$  las transformadas z de, respectivamente,  $x[n]$ ,  $y[n]$  y  $h[n]$ .

**La transformada z de la respuesta impulsional  $h[n]$  de un sistema LIT digital  $S$  es la denominada «función de transferencia del sistema  $S$ » y se simboliza como  $H(z)$ :**

$$\boxed{H(z) \triangleq Z\{h[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]z^{-n}} \quad (189)$$

Debido a que  $h[n]$  caracteriza totalmente a  $S$  y puesto que la transformada z es una operación reversible, toda la información contenida en  $h[n]$  está también contenida en  $H(z)$ , de modo que **la función de transferencia de un sistema LIT digital es una señal que caracteriza completa y enteramente al sistema**, del mismo modo que lo hace su respuesta impulsional.

Se observa que de la ecuación (188) ya pueden extraerse algunas conclusiones interesantes. De entrada, vemos que lo que en el dominio temporal es una operación más o menos complicada (la convolución entre dos señales), en el dominio transformado z se convierte en una operación mucho más simple (un producto de dos señales).

Y de ello se sigue directamente que, a diferencia de lo que ocurre en el dominio temporal,  **$H(z)$  puede obtenerse muy fácilmente a partir de  $X(z)$  e  $Y(z)$ :**

$$\boxed{H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}} \quad (190)$$

Así, denominando  $R_X$ ,  $R_Y$  y  $R_H$  a las ROC de, respectivamente,  $X(z)$ ,  $Y(z)$  y  $H(z)$ :

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z), \quad R_X \quad (191)$$

$$y[n] \xleftrightarrow{Z} Y(z), \quad R_Y \quad (192)$$

$$h[n] \xleftrightarrow{Z} H(z), \quad R_H \quad (193)$$



sabemos que  $R_X \cap R_H \subseteq R_Y$ , como ya hemos visto en la demostración 6 del subapartado 3.5 de este mismo módulo. Por tanto,  $Y(z)$  **existirá** ( $R_Y \neq \emptyset$ ) **siempre que existan**  $X(z)$  y  $H(z)$  ( $R_X \neq \emptyset, R_H \neq \emptyset$ ) **y que la intersección de sus ROC no sea vacía** ( $R_X \cap R_H \neq \emptyset$ ).

Una consecuencia muy importante de esto es que, **conociendo únicamente una pareja señal de entrada-señal de salida de un sistema LIT, ya somos capaces de obtener su respuesta impulsional**: calculando las transformadas z de ambas señales, dividiéndolas para obtener la función de transferencia del sistema y obteniendo su respuesta impulsional como el resultado de la transformada z inversa de su función de transferencia. Esto es algo que no podemos hacer trabajando en el dominio del tiempo, puesto que la convolución no tiene operación inversa; sin embargo, en el dominio transformado z sí es posible, ya que el producto de dos señales sí puede invertirse fácilmente calculando su división.

Para finalizar este apartado, se propone un pequeño ejercicio que ilustra esta última cuestión.

### Ejemplo 3

Se pide obtener la respuesta impulsional de un sistema LIT digital S del que solo se sabe que:

$$y[n] = T_S\{x[n] = u[n]\} = \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)u[n] \quad (194)$$

### Solución

Al ser S un sistema LIT, sacamos su respuesta impulsional mediante su función de transferencia:

$$h[n] = Z^{-1}\{H(z), R_H\} = Z^{-1}\left\{\frac{Y(z)}{X(z)}, R_H\right\} \quad (195)$$

Por la tabla 1, sabemos que:

$$X(z) = Z\{x[n]\} = Z\{u[n]\} = \frac{1}{1-z^{-1}} \quad (196)$$

$$Y(z) = Z\{y[n]\} = Z\left\{\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)u[n]\right\} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}z^{-1}}{1-\sqrt{2}z^{-1}+z^{-2}} \quad (197)$$

allí donde  $R_X$  y  $R_Y$ , o sea, las ROC de  $X(z)$  e  $Y(z)$  son iguales a  $|z| > 1$ .

Entonces, puesto que  $R_Y \neq \emptyset$  y que  $R_X \cap R_H \subseteq R_Y$ , ya sabemos que  $R_H \neq \emptyset$  y que, por tanto,  $H(z)$  existe. Ahora, aplicando la ecuación (190), obtenemos  $H(z)$ :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}z^{-1}}{\frac{1}{1-z^{-1}}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}z^{-1} - \frac{\sqrt{2}}{2}z^{-2}}{1-\sqrt{2}z^{-1}+z^{-2}} \quad (198)$$

Ahora, descomponemos  $H(z)$  en fracciones simples:

```
>> B = [0 sqrt(2)/2 -sqrt(2)/2]; % Vector fila: numerador de H(z)
>> A = [1 -sqrt(2)/2 1]; % Vector fila: denominador de H(z)
>> [AC,p,d] = residuez(B,A)
AC =
    0.3536 - 0.2443i
    0.3536 + 0.2443i
p =
    0.3536 + 0.9354i
    0.3536 - 0.9354i
d =
   -0.7071
>> [abs(AC) angle(AC)]
ans =
    0.4298   -0.6047
    0.4298    0.6047
>> [abs(p) angle(p)]
ans =
    1.0000    1.2094
    1.0000   -1.2094
```

Se observa lo siguiente:

- Polos de  $H(z)$ :  $p_1 \cong e^{j1.21}$ ,  $p_2 \cong e^{-j1.21}$ .
- Coeficientes  $d_i$ :  $d_1 = -0.7071 \cong -\sqrt{2}/2$ .
- Coeficientes  $A_i$  y  $C_i$ :  $A_1 \cong 0.43e^{-j0.605}$ ,  $A_2 \cong 0.43e^{j0.605}$ .

Así pues, la descomposición en fracciones simples de  $H(z)$  es la siguiente:

$$H(z) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{0.43e^{-j0.605}}{1 - e^{j1.21}z^{-1}} + \frac{0.43e^{j0.605}}{1 - e^{-j1.21}z^{-1}} \quad (199)$$

Entonces, dado que  $R_X$  y  $R_Y$  son iguales a  $|z| > 1$  y que  $R_X \cap R_H \subseteq R_Y$ , vemos que, como mínimo, ha de darse que  $R_H$  incluya a  $|z| > 1$ . Vista la descomposición obtenida en (199), se observa que  $R_H$  solo puede ser  $|z| > 1$ , ya que sus dos polos son de módulo 1 ( $|p_1| = |p_2| = 1$ ).

Ya sabemos, por tanto, que  $h[n]$  es una señal infinita orientada a la derecha, puesto que la ROC de  $H(s)$  es el exterior de la circunferencia  $|z| = 1$ .

Finalmente, ya podemos volver a (195) y obtener  $h[n]$ :

$$\begin{aligned} h[n] &= Z^{-1}\{H(z), |z| > 1\} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \delta[n] + 0.43e^{-j0.605}e^{j1.21n}u[n] + 0.43e^{j0.605}e^{-j1.21n}u[n] = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \delta[n] + 0.43(e^{-j(0.605-1.21n)} + e^{j(0.605-1.21n)})u[n] = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \delta[n] + 0.86\cos(0.605 - 1.21n)u[n] \end{aligned} \quad (200)$$

## 5.2. Caracterización de sistemas LIT digitales mediante su función de transferencia

Como ya hemos visto en el apartado anterior, la función de transferencia de un sistema LIT digital permite caracterizar por completo al sistema. A continuación, vamos a proceder sistemáticamente y vamos a ver cómo usar la función de transferencia a fin de:

- Calcular la salida de un sistema LIT digital ante cualquier señal de entrada, en el subapartado 5.2.1.

- Conocer las propiedades de un sistema LIT digital, en el subapartado 5.2.2.
- Caracterizar el sistema LIT digital global resultante de la asociación de sistemas LIT digitales, en el subapartado 5.2.3.

### 5.2.1. Cálculo de la salida en sistemas LIT digitales

Por la ecuación (188), sabemos que la transformada z de la señal de salida de todo sistema LIT digital es igual al resultado del producto de la transformada z de la señal de entrada por la función de transferencia del sistema.

De este modo, ya vemos cómo calcular la salida en sistemas LIT digitales mediante el uso de su función de transferencia: calculando la transformada z de la señal de entrada, multiplicándola por la función de transferencia para obtener la transformada z de la señal de salida y calculando la transformada z inversa de esta para obtener la señal de salida en el dominio temporal.

A continuación, se propone un ejercicio a fin de ilustrar este procedimiento.

#### Ejemplo 4

Sean dos sistemas LIT digitales  $S_1$  y  $S_2$  de los que conocemos, respectivamente, su relación entrada-salida y su función de transferencia:

$$y_1[n] = T_{S_1}\{x_1[n]\} = \frac{1}{2}x_1[n] + \frac{1}{2}x_1[n-1] \quad (201)$$

$$H_2(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} \quad (202)$$

Se pide calcular las salidas de  $S_1$  y  $S_2$  frente a la señal de entrada  $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ .

#### Solución

a) Vemos que  $S_1$  que calcula el promedio de la muestra actual con la muestra anterior. Sustituyendo  $x_1[n] = \delta[n]$  en (201), obtenemos su respuesta impulsional:

$$h_1[n] = T_{S_1}\{x_1[n] = \delta[n]\} = \frac{1}{2}\delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1] \quad (203)$$

Por (128), sabemos que la función de transferencia de  $S_1$  es la siguiente:

$$\begin{aligned} H_1(s) &= Z\{h_1[n]\} = Z\left\{\frac{1}{2}\delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1]\right\} = \\ &= \frac{1}{2}Z\{\delta[n]\} + \frac{1}{2}Z\{\delta[n-1]\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z^{-1} \end{aligned} \quad (204)$$

Vemos que  $H_1(s)$  presenta una ganancia de  $1/2$ , un cero en  $z = -1$  y un polo en  $z = 0$  y que, al ser  $h_1[n]$  una señal finita, su ROC ( $R_{H_1}$ ) abarca todo el plano z, siendo igual a  $\forall z - \{z = 0\}$ .

Por otra parte, obtenemos la transformada z de la señal de entrada consultando la tabla 1:

$$X_1(z) = Z\left\{x_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\right\} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \quad (205)$$

Se observa que  $X_1(z)$  presenta ganancia 1, un polo en  $z = 1/2$  y un cero en  $z = 0$ . Al ser  $x_1[n]$  una señal infinita orientada la derecha, la ROC de  $X_1(z)$  ( $R_{X1}$ ) es el exterior de la circunferencia de radio  $1/2$ , o sea,  $|z| > 1/2$ .

Así pues, el producto de  $X_1(z)$  por  $H_1(z)$  nos permite obtener  $Y_1(z)$ , es decir, la transformada z de  $y_1[n]$ , la señal de salida de  $S_1$ :

$$Y_1(z) = X_1(z)H_1(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z^{-1} \right) = \frac{1}{2} \frac{1 + z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \quad (206)$$

Ahora, mediante la función `residuez`, descomponemos  $Y_1(z)$  en fracciones simples:

```
>> B = (1/2)*[1 1]; % Vector fila: numerador de Y1(z)
>> A = [1 -1/2]; % Vector fila: denominador de Y1(z)
>> [AC,p,d] = residuez(B,A)
AC =
    1.5000
p =
    0.5000
d =
   -1
```

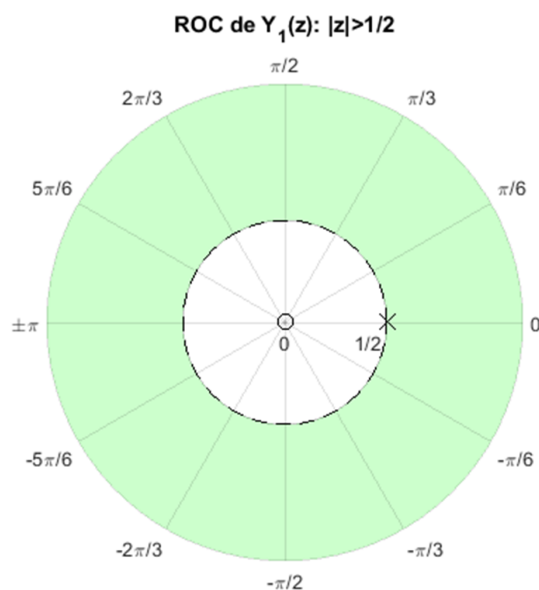
Así pues, la descomposición en fracciones simples de  $Y_1(z)$  es la siguiente:

$$Y_1(z) = -1 + \frac{\frac{3}{2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \quad (207)$$

Entonces, por la propiedad de convolución de la transformada z, sabemos que  $R_{Y1}$ , la ROC de  $Y_1(z)$ , es tal que  $R_{X1} \cap R_{H1} \subseteq R_{Y1}$ . Puesto que  $R_{H1} = \forall s - \{z = 0\}$  y que  $R_{X1}$  es  $|z| > 1/2$  ( $z = 0$  también está excluido de  $R_{X1}$ ), sucede que  $R_{X1} \cap R_{H1} = R_{X1}$ . Por tanto,  $R_{X1} \subseteq R_{Y1}$ ; o sea, el exterior de la circunferencia de radio  $1/2$  está incluido en  $R_{Y1}$ .

Puesto que  $Y_1(z)$  presenta un polo en  $z = 1/2$ ,  $y_1[n]$  no será una señal finita y  $R_{Y1}$  no podrá abarcar todo el plano z. Por tanto, la única posibilidad es que  $R_{Y1} = R_{X1}$ , es decir, que la ROC de  $Y_1(z)$  sea  $|z| > 1/2$ , tal y como se ilustra en la figura 18:

Figura 18. Representación gráfica conjunta del diagrama de polos y ceros y de la ROC de  $Y_1(z)$



Y ahora ya estamos en condiciones de calcular la transformada z inversa de  $Y_1(z)$  y obtener, finalmente,  $y_1[n]$ :

$$y_1[n] = Z^{-1}\left\{Y_1(s), R_{Y1}\right\} = Z^{-1}\left\{-1 + \frac{\frac{3}{2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, R_{Y1}\right\} = -Z^{-1}\left\{1, \forall z\right\} + \frac{3}{2}Z^{-1}\left\{\frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \left|z\right| > 1/2\right\} = -\delta[n] + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad (208)$$

b) Por las transformadas típicas de la tabla 1, vemos que  $R_{H2}$  (la ROC de la función de transferencia del sistema  $S_2$ ) presenta un polo en  $z = 1$  y un cero en  $z = 0$ . Lo que no podemos saber con la información de la que disponemos es si  $R_{H2}$  es el exterior de la circunferencia de radio 1 centrada en el origen del plano  $z$  ( $|z| > 1$ ) o si es el exterior de dicha circunferencia ( $|z| < 1$ ). Por tanto, no nos queda más remedio que trabajar con ambas hipótesis.

La transformada z de la señal de entrada ya la conocemos de (205), de modo que:

$$Y_2(z) = X_2(z)H_2(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}\left(\frac{1}{1 - z^{-1}}\right) = \frac{1}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}} \quad (209)$$

Ahora, mediante la función `residuez`, descomponemos  $Y_2(z)$  en fracciones simples:

```
>> B = 1; % Vector fila: numerador de Y2(z)
>> A = [1 -3/2 1/2]; % Vector fila: denominador de Y2(z)
>> [AC,p,d] = residuez(B,A)
AC =
     2
    -1
p =
    1.0000
    0.5000
d =
    []
```

Así pues, la descomposición en fracciones simples de  $Y_2(z)$  es la siguiente:

$$Y_2(z) = \frac{2}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \quad (210)$$

Y llegados a este punto, hay dos posibles soluciones a este problema. Si se asume que  $R_{H2}$  es  $|z| > 1$ , entonces  $R_{Y2}$  solo puede ser  $|z| > 1$ , puesto que  $R_{X2} \cap R_{H2} \subseteq R_{Y2}$  y  $R_{X2}$  es  $|z| > 1/2$  (la señal de entrada es infinita orientada a la derecha), en cuyo caso:

$$y_2[n] = Z^{-1}\left\{Y_2(s), R_{Y2}\right\} = 2Z^{-1}\left\{\frac{1}{1 - z^{-1}}, \left|z\right| > 1/2\right\} - Z^{-1}\left\{\frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \left|z\right| > 1/2\right\} = (2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n)u[n] \quad (211)$$

Pero si se asume que  $R_{H2}$  es  $|z| < 1$ , entonces, por la misma razón que antes,  $R_{Y2}$  solo puede ser  $1/2 < |z| < 1$ , en cuyo caso:

$$y_2[n] = 2Z^{-1}\left\{\frac{1}{1 - z^{-1}}, \left|z\right| < 1\right\} - Z^{-1}\left\{\frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \left|z\right| > 1/2\right\} = -2u[-n - 1] - \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad (212)$$

### 5.2.2. Propiedades de los sistemas LIT digitales

A continuación, se estudia la relación existente entre las características de la función de transferencia de un sistema LIT digital y las propiedades de dicho sistema.

#### Causalidad

Sabemos que un sistema LIT digital  $S$  es causal si y solo si su respuesta impulsional  $h[n]$  es igual a cero para  $n < 0$ :

$$S \text{ es causal} \Leftrightarrow h[n] = 0, \quad \forall n < 0 \quad (213)$$

Por tanto, es seguro que la respuesta impulsional de un sistema LIT digital causal no será nunca ni una señal infinita orientada a la izquierda ni una señal infinita orientada a ambos lados. En todo caso:

- Si  $S$  es un sistema causal FIR,  $h[n]$  será una señal finita que cumpla con (213).
- Si  $S$  es un sistema causal IIR,  $h[n]$  será una señal infinita orientada a la derecha que cumpla con (213).

Así pues, ya podemos establecer una primera conclusión:

**Un sistema LIT digital puede ser causal solo si la ROC de su función de transferencia no es:**

- **El interior de una circunferencia centrada en el origen**, puesto que, en ese caso, su respuesta impulsional será una señal infinita orientada a la izquierda.
- **Un anillo comprendido entre dos circunferencias centradas en el origen**, puesto que, en ese caso, su respuesta impulsional será una señal infinita orientada a ambos lados.

Denominemos  $R_H$  a la ROC de la función de transferencia  $H(z)$  del sistema LIT digital  $S$ . Conviene notar que el hecho de que  $R_H$  abarque todo el plano  $z$ , o sea, el exterior de una circunferencia centrada en el origen, no garantiza que  $S$  sea causal, puesto que no basta con que  $h[n]$  sea finita o infinita orientada a la derecha, sino que, además, ha de cumplir con la condición expresada en (213).

Podemos ilustrar esto con dos ejemplos muy simples:

- Si  $h[n] = \delta[n+1]$ ,  $R_H = \forall z - \{z \rightarrow \infty\}$ , siendo  $S$  un sistema FIR no causal.

- Si  $h[n] = u[n+1]$ ,  $R_H = \{|z| > 1\} - \{z \rightarrow \infty\}$ , siendo  $S$  un sistema IIR no causal.

La clave de este hecho la encontramos en la propiedad de desplazamiento temporal de la transformada  $z$  (ver el subapartado 3.2 de este mismo módulo). Entre otras cosas, esta propiedad nos indica que **un desplazamiento horizontal arbitrario aplicado a una señal temporal solo modifica la ROC de su transformada  $z$  por la posible inclusión o exclusión de  $z = 0$  o  $z \rightarrow \infty$** , debido al factor  $z^{-n_0}$  que aparece en el dominio  $z$  como consecuencia del desplazamiento:

- Si el desplazamiento es un adelanto de la señal, entonces  $n_0 < 0$  y el factor  $z^{-n_0}$  excluye a  $z \rightarrow \infty$  de la ROC.
- Si el desplazamiento es un atraso de la señal, entonces  $n_0 > 0$  y el factor  $z^{-n_0}$  excluye a  $z = 0$  de la ROC.

Puesto que la forma general de las señales transformadas definida en (131) no incluye monomios con potencias positivas de  $z$ , el adelanto de la señal (desplazamiento hacia valores negativos de  $n$ ) es el único de entre los dos tipos de desplazamiento horizontal que puede poner en peligro la condición de causalidad de (213).

Por tanto, el quid está en la inclusión o exclusión de  $z \rightarrow \infty$  en la ROC:

**Un sistema LIT digital FIR es causal si y solo si  $z \rightarrow \infty$  está incluido en la ROC de su función de transferencia.**

**Un sistema LIT digital IIR es causal si y solo si la ROC de su función de transferencia es el exterior de la circunferencia de radio igual al módulo del polo de mayor módulo y  $z \rightarrow \infty$  está incluido en dicha ROC.**

Es decir:

$$S \text{ es causal} \Leftrightarrow \begin{cases} R_H = \forall z + \{z \rightarrow \infty\} \\ \text{o} \\ R_H = \{|z| > |p|\} + \{z \rightarrow \infty\} \end{cases} \quad (214)$$

siendo  $|p|$  el módulo del polo de mayor módulo de  $H(z)$ .

## Estabilidad

Sabemos que un sistema LIT digital  $S$  es estable si y solo si su respuesta impulsional  $h[n]$  es absolutamente sumable:

$$S \text{ es estable} \Leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < \infty \quad (215)$$

Ya vimos en (10) que la convergencia de la transformada z de  $h[n]$  no depende de la fase de z:

$$|H(z)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] r^{-n} e^{-j\omega n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n] r^{-n} e^{-j\omega n}| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| r^{-n} \quad (216)$$

allí donde  $r = |z|$ ,  $\omega = \text{Arg}(z)$  y donde  $H(z)$  es la función de transferencia de S.

Si evaluamos (216) para  $r = 1$ , o sea, para  $z = e^{j\omega}$ , vemos que la absoluta sumabilidad de  $h[n]$  es cota superior de  $|H(e^{j\omega})|$ :

$$|H(e^{j\omega})| \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| r^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| \quad (217)$$

Comparando (215) con (217), se observa que la condición de estabilidad de S es equivalente a que  $|H(e^{j\omega})|$  sea un valor finito. Y que  $|H(e^{j\omega})|$  sea un valor finito implica que la ROC de  $H(z)$ ,  $R_H$ , incluya la circunferencia unidad del plano z (es decir, circunferencia de radio 1).

Por tanto, podemos concluir que:

**Un sistema LIT digital es estable si y solo si la circunferencia unidad del plano z está incluida en la ROC de su función de transferencia:**

$$S \text{ es estable} \Leftrightarrow \{|z|=1\} \subseteq R_H \quad (218)$$

De esto se sigue que, como ya sabemos, todo sistema LIT digital FIR es estable.

Si, además, nos ceñimos a señales transformadas racionales de la forma definida en la ecuación (131), podemos concretar también una importante conclusión referida a la doble condición de causalidad y estabilidad de sistemas LIT digitales:



Un sistema LIT digital FIR cuya función de transferencia incluya a  $z \rightarrow \infty$  en su ROC es siempre causal y estable.

Un sistema LIT digital IIR cuya función de transferencia tenga una ROC que sea el exterior de la circunferencia de radio igual al módulo del polo de mayor módulo y que incluya a  $z \rightarrow \infty$  es causal y estable si y solo si todos los polos de su función de transferencia tienen módulo menor que 1 (o sea, si están ubicados en el interior de la circunferencia unidad del plano  $z$ ).

Es decir:

$$S \text{ es causal y estable} \Leftrightarrow \begin{cases} R_H = \forall z + \{z \rightarrow \infty\} \\ \text{o} \\ R_H = \{|z| > |p_i|\} + \{z \rightarrow \infty\} \text{ y } |p_i| < 1, \forall i \end{cases} \quad (219)$$

siendo los  $p_i$  los polos de  $H(z)$  y  $|p_i|$  el módulo del polo de mayor módulo de  $H(z)$ .

## Memoria

Sabemos que un sistema LIT digital  $S$  tiene memoria si y solo si su respuesta impulsional  $h[n]$  es diferente de 0 para algún valor positivo de la variable independiente:

$$S \text{ tiene memoria} \Leftrightarrow \exists n_0 > 0: h[n_0] \neq 0 \quad (220)$$

siendo  $n_0$  un valor entero ( $n_0 \in \mathbb{Z}$ ). Además, la memoria de  $S$  se mide en muestras y es igual al máximo valor positivo  $n_0$  para el cual  $h[n]$  es diferente de 0.

En general, respecto de la memoria de los sistemas LIT digitales, podemos decir lo siguiente:

Sea  $H(z)$  la función de transferencia de un sistema LIT digital  $S$ , sea  $R_H$  la ROC de  $H(z)$ . Solo puede darse uno de los siguientes escenarios:

1) Si  $R_H$  es  $\forall z$ , el sistema  $S$  es FIR y  $h[n]$  es una señal de longitud finita:

- Si  $R_H$  no incluye a  $z = 0$ , en  $H(z)$  hay alguna potencia negativa de  $z$ . Siendo  $z^{-n_0}$  la potencia más negativa de  $z$  en  $H(z)$  ( $n_0 > 0$ ),  $S$  tiene una memoria de  $n_0$  muestras.
- Si  $R_H$  incluye a  $z = 0$ , en  $H(z)$  no hay ninguna potencia negativa de  $z$  y  $S$  no tiene memoria.

2) Si  $R_H$  es el exterior de una circunferencia, el sistema  $S$  es IIR y  $h[n]$  es una señal infinita orientada a la derecha, por tanto, la memoria de  $S$  es infinita.

3) Si  $R_H$  es el interior de una circunferencia, el sistema  $S$  es IIR y  $h[n]$  es una señal infinita orientada a la izquierda. Siendo  $M$  y  $N$  los órdenes del numerador y el denominador de  $H(z)$ :

- Si  $M \geq N$ , entonces  $R_H$  no incluye a  $z = 0$  y  $S$  tiene una memoria de  $M - N$  muestras.
- Si  $M < N$ , entonces  $R_H$  incluye a  $z = 0$  y  $S$  no tiene memoria.

4) Si  $R_H$  es un anillo, el sistema  $S$  es IIR y  $h[n]$  es una señal infinita orientada a ambos lados, por tanto, la memoria de  $S$  es infinita.

## Invertibilidad

Sabemos que un sistema LIT digital  $S_1$  de respuesta impulsional  $h_1[n]$  es invertible si y solo existe otro sistema LIT digital  $S_2$  de respuesta impulsional  $h_2[n]$  tal que la convolución entre  $h_1[n]$  y  $h_2[n]$  es igual a una señal delta discreta:

$$S_1 \text{ y } S_2 \text{ son inversos} \Leftrightarrow h_1[n] * h_2[n] = \delta[n] \quad (221)$$

Aplicando la propiedad de convolución de la transformada z en (221), obtenemos la condición de invertibilidad en términos de las funciones de transferencia  $H_1(z)$  y  $H_2(z)$ :

$$Z\{h_1[n] * h_2[n]\} = \underbrace{Z\{h_1[n]\}}_{H_1(z)} \underbrace{Z\{h_2[n]\}}_{H_2(z)} = \underbrace{Z\{\delta[n]\}}_1 \Rightarrow H_1(z)H_2(z) = 1 \quad (222)$$

Por tanto, podemos concluir que:

**Dos sistemas LIT digitales son invertibles si y solo si la función de transferencia de uno es la inversa de la del otro:**

$$\boxed{S_1 \text{ y } S_2 \text{ son inversos} \Leftrightarrow H_1(z) = \frac{1}{H_2(z)}} \quad (223)$$

Se observa, por tanto, que caracterizar el sistema inverso de un sistema LIT digital es muy sencillo trabajando en el dominio transformado  $z$ : conocida  $h_1[n]$ , se calcula  $H_1(z)$  mediante la transformada  $z$  directa, se obtiene  $H_2(z)$  invirtiendo  $H_1(z)$ , tal y como se indica en (223), y se obtiene finalmente  $h_2[n]$  como el resultado de la transformada  $z$  inversa de  $H_2(z)$ .

Además, esto permite obtener un criterio más acerca de la invertibilidad en sistemas LIT digitales:  $S_1$  y  $S_2$  **son invertibles si existen  $H_1(z)$  y  $H_2(z)$ , es decir, si las ROC de  $H_1(z)$  y  $H_2(z)$  son diferentes del vacío ( $R_{H1} \neq \emptyset, R_{H2} \neq \emptyset$ ).**

Finalmente, si nos ceñimos a señales transformadas racionales de la forma definida en la ecuación (131), podemos concretar importantes conclusiones sobre la invertibilidad de sistemas LIT digitales:

Un sistema LIT digital cuya función de transferencia sea racional es siempre invertible, puesto que la función de transferencia de su sistema inverso es otra función racional cuyos ceros son los polos de aquella y cuyos polos son los ceros de aquella:

$$H_1(z) = G \frac{\prod_{i=1}^M (1 - c_i z^{-1})}{\prod_{i=1}^N (1 - p_i z^{-1})} \Leftrightarrow H_2(z) = \frac{1}{G} \frac{\prod_{i=1}^M (1 - p_i z^{-1})}{\prod_{i=1}^N (1 - c_i z^{-1})} \quad (224)$$

allí donde  $H_1(z) = 1/H_2(z)$  y donde:

- $G$  es el factor de ganancia de  $H_1(z)$  y  $1/G$  es el factor de ganancia de  $H_2(z)$ .
- Los coeficientes  $p_i$  son los polos de  $H_1(z)$  y los ceros de  $H_2(z)$ .
- Los coeficientes  $c_i$  son los ceros de  $H_1(z)$  y los polos de  $H_2(z)$ .

Así, se denomina **sistema de fase mínima** a aquel sistema LIT con función de transferencia racional cuyos polos y ceros tienen módulo inferior a 1 (es decir, cuyos polos y ceros están situados en el interior de la circunferencia unidad del plano  $z$ ). De (224) se sigue que todos los polos y ceros del sistema inverso de un sistema de fase mínima también tienen parte real negativa.

Por tanto, todo sistema de fase mínima es causal y estable y tiene un sistema inverso que también es causal y estable (que, por tanto, también es de fase mínima).

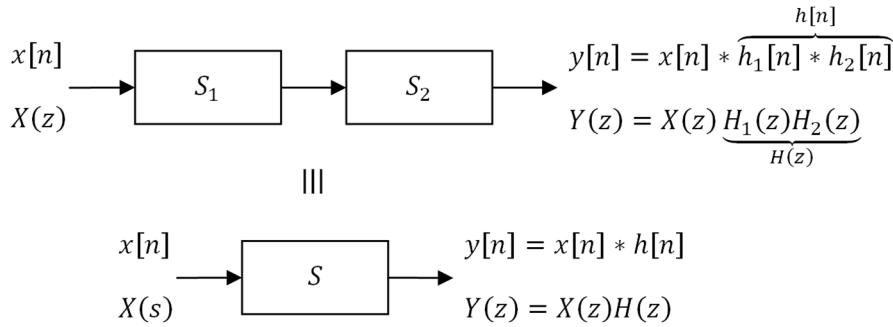
### 5.2.3. Asociación de sistemas LIT digitales

A continuación, se presenta cómo caracterizar la función de transferencia del sistema LIT digital global resultante de la asociación de sistemas LIT digitales.

#### Asociación en serie

Sean dos sistemas LIT digitales  $S_1$  y  $S_2$ , cuyas respuestas impulsionales son  $h_1[n]$  y  $h_2[n]$ , y cuyas funciones de transferencia son  $H_1(z)$  y  $H_2(z)$ . La asociación en serie de  $S_1$  y  $S_2$  se caracteriza del modo siguiente:

Figura 19. Función de transferencia de la asociación en serie de sistemas LIT digitales



Por tanto, la función de transferencia  $H(z)$  del sistema LIT digital global resultante de la asociación en serie de  $S_1$  y  $S_2$  es tal que:

$$\boxed{H(z) = H_1(z)H_2(z)} \quad (225)$$

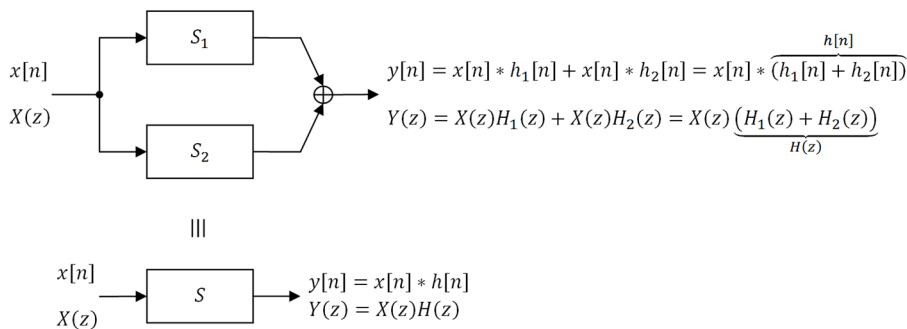
En general, para toda asociación en serie de  $N$  sistemas LIT digitales, la función de transferencia del sistema global resultante es la siguiente:

$$H(z) = \prod_{i=1}^N H_i(z) \quad (226)$$

### Asociación en paralelo

Sean dos sistemas LIT digitales  $S_1$  y  $S_2$ , cuyas respuestas impulsionales son  $h_1[n]$  y  $h_2[n]$  y cuyas funciones de transferencia son  $H_1(z)$  y  $H_2(z)$ . La asociación en paralelo de  $S_1$  y  $S_2$  se caracteriza del modo siguiente:

Figura 20. Función de transferencia de la asociación en paralelo de sistemas LIT digitales



Por tanto, la función de transferencia  $H(z)$  del sistema LIT digital global resultante de la asociación en paralelo de  $S_1$  y  $S_2$  es tal que:

$$\boxed{H(z) = H_1(z) + H_2(z)} \quad (227)$$

En general, para toda asociación en serie de  $N$  sistemas LIT digitales, la función de transferencia del sistema global resultante es la siguiente:

$$H(s) = \sum_{i=1}^N H_i(z) \quad (228)$$

### Asociación en lazo de realimentación

Sean dos sistemas LIT digitales  $S_1$  y  $S_2$ , cuyas respuestas impulsionales son  $h_1[n]$  y  $h_2[n]$  y cuyas funciones de transferencia son  $H_1(z)$  y  $H_2(z)$ .

Recordemos que la respuesta impulsional  $h[n]$  del sistema global  $S$  resultante la asociación en lazo de realimentación de  $S_1$  y  $S_2$  es igual a la convolución entre  $h_1[n]$  y una señal  $h_3[n]$ :

$$h[n] = h_1[n] * h_3[n] \quad (229)$$

allí donde  $h_3[n]$  es tal que:

$$h_3[n] * (\delta[n] - h_1[n] * h_2[n]) = \delta[n] \quad (230)$$

Aplicando en (230) las propiedades de linealidad y convolución temporal de la transformada z, se obtiene lo siguiente:

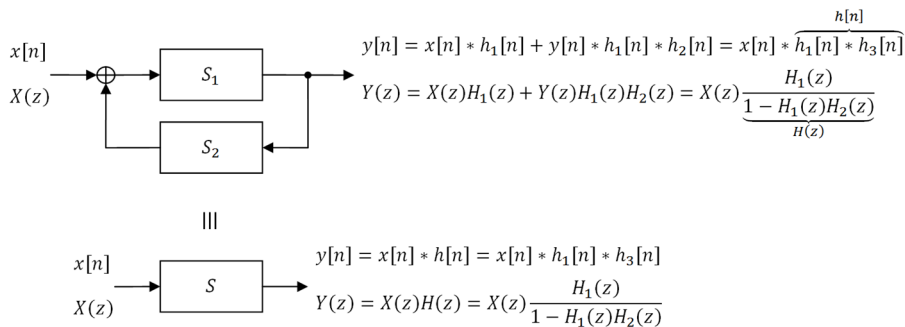
$$H_3(z)(1 - H_1(z)H_2(z)) = 1 \Rightarrow H_3(z) = \frac{1}{1 - H_1(z)H_2(z)} \quad (231)$$

Haciendo lo propio en (229) y sustituyendo el resultado obtenido en (231), se concluye lo siguiente:

$$H(z) = H_1(z)H_3(z) = H_1(z) \frac{1}{1 - H_1(z)H_2(z)} \quad (232)$$

Así pues, la asociación en lazo de realimentación de  $S_1$  y  $S_2$  se caracteriza del modo siguiente:

Figura 21. Función de transferencia de la asociación en lazo de realimentación de sistemas LIT digitales



Y, por tanto, la función de transferencia  $H(z)$  del sistema LIT digital global resultante de la asociación en lazo de realimentación de  $S_1$  y  $S_2$  es tal que:

$$H(z) = \frac{H_1(z)}{1 - H_1(z)H_2(z)} \quad (233)$$

Se observa, pues, que la caracterización de la asociación en lazo de realimentación de sistemas LIT digitales es más satisfactoria trabajando desde el dominio transformado  $z$  que desde el dominio temporal, puesto que el cálculo de  $h_3[n]$  siempre es problemático, mientras que  $H(z)$  se obtiene operando directamente con  $H_1(z)$  y  $H_2(z)$ .

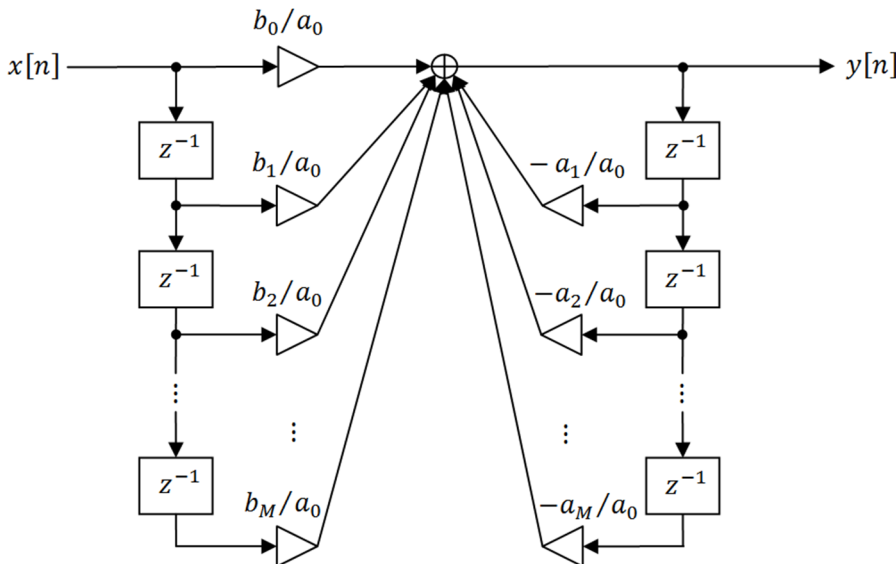
### 5.3. Resolución de ecuaciones en diferencias lineales de coeficientes constantes en el dominio transformado $z$

Sea un sistema LIT digital  $S$  cuya respuesta impulsional es  $h[n]$  y cuya relación entrada-salida es una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes de orden  $N$  de la forma:

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (234)$$

Asimismo, sabemos que este sistema  $S$  puede ser representado mediante el siguiente diagrama de bloques:

Figura 22. Posible implementación del diagrama de bloques del sistema  $S$



Conviene recordar también que  $S$  es un sistema LIT siempre que las salidas de los bloques de retardo del sistema valgan 0 en el instante inicial en que el sistema se pone en funcionamiento. De ahora en adelante, pues, vamos a asumir que la puesta en condiciones iniciales de  $S$  ha sido exactamente esa y no otra. De lo contrario,  $S$  no sería un sistema LIT y, por tanto, no cumpliría

con el teorema de las autofunciones, por lo que caracterizar sus señales de entrada y de salida y su respuesta impulsional en el dominio transformado  $z$  no tendría ningún sentido.

Así, el objetivo es obtener  $h[n]$  a partir de la relación entrada-salida de  $S$ . A tal efecto, empezamos aplicando la transformada  $z$  a ambos lados de la igualdad en (234):

$$Z\left\{\sum_{k=0}^N a_k y[n-k]\right\} = Z\left\{\sum_{k=0}^M b_k x[n-k]\right\} \quad (235)$$

Aplicando la propiedad de linealidad de la transformada  $z$  en (235), se obtiene lo siguiente:

$$\sum_{k=0}^N a_k Z\{y[n-k]\} = \sum_{k=0}^M b_k Z\{x[n-k]\} \quad (236)$$

Siendo  $X(z) = Z\{x[n]\}$  e  $Y(z) = Z\{y[n]\}$ , podemos aplicar la propiedad de derivación en el tiempo de la transformada  $z$  en (236) y obtener lo siguiente:

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} X(z) \quad (237)$$

Así, sacando a  $X(z)$  e  $Y(z)$  fuera de los sumatorios (pues son independientes de  $k$ ) en (237), agrupándolas a un lado de la igualdad y dejando a los sumatorios en el otro, llegamos a la siguiente expresión:

$$Y(z) \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} = X(z) \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \Rightarrow \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \quad (238)$$

Se observa, pues, que, **partiendo de la relación entrada-salida del sistema  $S$  y aplicando la transformada  $z$ , hemos obtenido la función de transferencia de  $S$ :**

$$\boxed{H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}} \quad (239)$$

He aquí, por tanto, una importante conclusión:



**La función de transferencia de un sistema LIT digital es el elemento de conexión entre la relación entrada-salida del sistema con la respuesta impulsional del sistema:**

- Para obtener  $h[n]$  a partir de la relación entrada-salida, obtenemos primero  $H(z)$  a partir de la relación entrada-salida mediante la aplicación de las propiedades de la transformada z y, a continuación, obtenemos la respuesta impulsional calculando  $h[n] = Z^{-1}\{H(z)\}$ .
- Para obtener la relación entrada-salida a partir de  $h[n]$ , obtenemos primero la función de transferencia calculando  $H(z) = Z\{h[n]\}$  y, a continuación, obtenemos la relación entrada-salida a partir de  $H(z)$  mediante la aplicación de las propiedades de la transformada z.

Asimismo, se observa que la expresión de  $H(z)$  obtenida en (239) es exactamente igual a la forma de la señal transformada racional definida en (131):

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{M-1} z^{-(M-1)} + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{N-1} z^{-(N-1)} + a_N z^{-N}} \quad (240)$$

siendo  $Y(z)$  y  $X(z)$  los polinomios del numerador y denominador de  $H(z)$ , respectivamente.

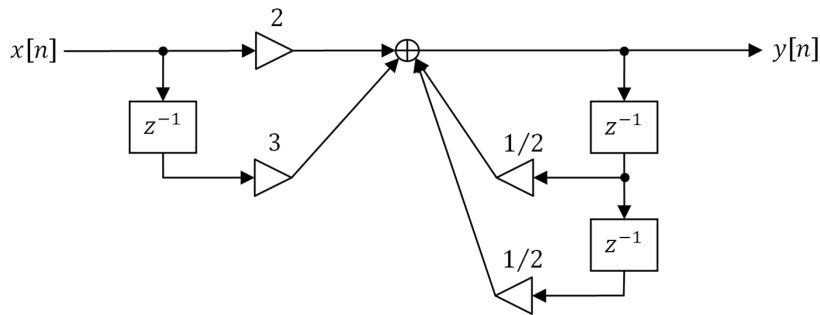
Por lo tanto, puesto que solo queda calcular  $h[n] = Z^{-1}\{H(z)\}$ , vemos que, **una vez obtenida  $H(z)$ , simplemente hay aplicar la estrategia de cálculo de la transformada z inversa desarrollada en el apartado 4 de este mismo módulo y obtener  $h[n]$ .**

A tal efecto, y para finalizar este apartado, se plantea a continuación un ejercicio de aplicación de toda esta estrategia.

### Ejemplo 5

Sea un sistema LIT digital  $S$  caracterizado por el siguiente diagrama de bloques:

Figura 23. Diagrama de bloques del sistema S



Se pide calcular la respuesta impulsional de S.

### Solución

En primer lugar, visto el diagrama de bloques del sistema, está claro que la relación entrada-salida de S es una ecuación en diferencias lineal de coeficientes constantes de la forma expresada en (234). Así, la relación entrada-salida de S se obtiene directamente a partir del diagrama:

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] - \frac{1}{2}y[n-2] = 2x[n] + 3x[n-1] \quad (241)$$

Se observa, tanto en su diagrama de bloques, como en su relación entrada-salida que S es un sistema LIT causal, puesto que el cálculo de  $y[n]$  solo depende de  $x[n]$  y de diversas versiones retardadas de  $x[n]$  e  $y[n]$ .

En segundo lugar, puesto que sabemos que la función de transferencia asociada a un sistema de este tipo es de la forma expresada en (239), también podemos obtener directamente  $H(z)$ :

$$H(z) = \frac{2 + 3z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}} \quad (242)$$

A continuación, descomponemos  $H(z)$  en fracciones simples. A tal efecto, y para ahorrar-nos los cálculos, usamos la función `residuez` de MATLAB:

```
>> B = [2 3]; % Vector fila: numerador de H(z)
>> A = [1 -1/2 -1/2]; % Vector fila: denominador de H(z)
>> [AC,p,d] = residuez(B,A)
AC =
    3.3333
   -1.3333
p =
    1.0000
   -0.5000
d =
    []
```

Vemos que:

- Polos de  $H(z)$ :  $p_1 = 1$ ,  $p_2 = -1/2$ .
- Coeficientes  $A_i$ :  $A_1 = 10/3$ ,  $A_2 = -4/3$ .

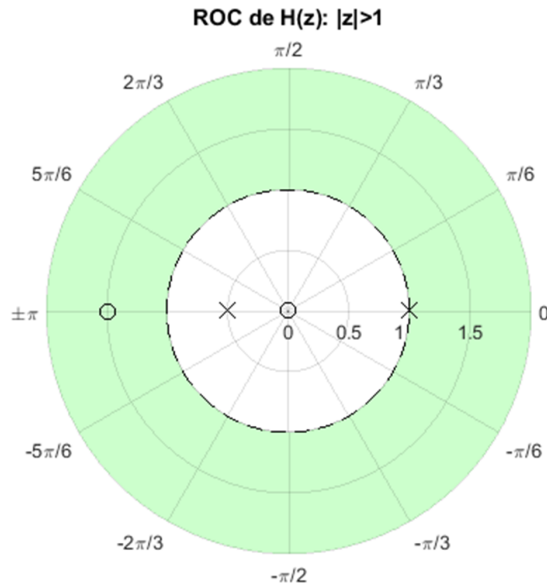
Así pues, la descomposición en fracciones simples de  $H(z)$  es la siguiente:

$$H(z) = \frac{10}{3} \underbrace{\frac{1}{1-z^{-1}}}_{H_1(z)} - \frac{4}{3} \underbrace{\frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}}_{H_2(z)} = \frac{10}{3} H_1(z) - \frac{4}{3} H_2(z) \quad (243)$$

Entonces, puesto que, como ya hemos visto, S es un sistema causal, la ROC de esta  $H(z)$  es necesariamente el exterior de una circunferencia centrada en el origen del plano z. Hay dos candidatos posibles, que se corresponden con los módulos de los polos de  $H(z)$ .

Dado que la ROC, por definición, no puede contener ningún polo, es el polo de módulo mayor el que marca su límite. Por tanto, la ROC de esta  $H(z)$  es  $|z| > 1$ , tal y como se ilustra en la figura 24:

Figura 24. Representación gráfica conjunta del diagrama de polos y ceros y de la ROC de  $H(z)$



Se observa, además, que  $S$  es un sistema LIT, causal e inestable, puesto que la circunferencia unidad ( $|z|=1$ ) no está incluida en la ROC de su función de transferencia.

Así pues, las ROC asociadas a las dos fracciones simples de (243) son, respectivamente,  $|z| > 1$  y  $|z| > 1/2$  y, de este modo, las transformadas  $z$  inversas ambas fracciones simples darán lugar a dos señales infinitas orientadas a la derecha. Por tanto, atendiendo a la tabla 1:

$$h_1[n] = Z^{-1}\{H_1(z), |z| > 1\} = Z^{-1}\left\{\frac{1}{1-z^{-1}}, |z| > 1\right\} = u[n] \quad (244)$$

$$h_2[n] = Z^{-1}\left\{H_2(z), |z| > \frac{1}{2}\right\} = Z^{-1}\left\{\frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}, |z| > \frac{1}{2}\right\} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad (245)$$

Y, finalmente, obtenemos la respuesta impulsional de  $S$ :

$$h[n] = \frac{10}{3} h_1[n] - \frac{4}{3} h_2[n] = \frac{10}{3} u[n] - \frac{4}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] = \left(\frac{10}{3} - \frac{4}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) u[n] \quad (246)$$

Por tanto:

$$h[n] = \frac{1}{3} (10 - (-2)^{-n+2}) u[n] \quad (247)$$

## Resumen

En este módulo, hemos estudiado la transformada  $z$  como herramienta que permite caracterizar los sistemas LIT digital, complementando de este modo la caracterización de los mismos en el dominio del tiempo.

En primer lugar, hemos visto las ecuaciones de cálculo de la transformada  $z$  (la ecuación de análisis y la ecuación de síntesis) como el resultado de la aplicación de los postulados del teorema de las autofunciones de los sistemas LIT digitales. Así, la transformada  $z$  es la herramienta que nos permite expresar señales digitales como el resultado de una combinación lineal de exponenciales complejas. Además, hemos estudiando también los conceptos de región de convergencia (ROC) y de diagrama de polos y ceros: ambos son fundamentales para poder representar las señales y trabajar con ellas en el dominio transformado  $z$ .

En segundo lugar, hemos calculado las transformadas  $z$  de todo un conjunto de señales básicas y, asimismo, las propiedades fundamentales de la transformada  $z$ . El principal objetivo de todos estos resultados, en lo referente a la teoría de señales y sistemas que estamos estudiando, no es otro que el de permitirnos representar señales complejas en el dominio transformado  $z$  sin que ello suponga un incremento en la dificultad de los cálculos matemáticos asociados. En este sentido, hemos visto una estrategia de cálculo muy interesante para nosotros: aquella que nos permite obtener la transformada  $z$  inversa de una señal racional (cociente de polinomios). Además, algunas de las propiedades de la transformada  $z$  nos permiten obtener conclusiones muy relevantes y de gran interés: por ejemplo, la naturaleza de la transformada  $z$  de toda señal real (propiedad de conjugación compleja) o la transformación del cálculo de la convolución temporal en un producto de señales en el dominio transformado  $z$  (propiedad de convolución temporal).

Finalmente, y como objetivo primordial del módulo, hemos introducido el concepto de función de transferencia de un sistema LIT digital (que no es más que la transformada  $z$  de su respuesta impulsional) y hemos estudiado cómo, mediante esta función de transferencia, es posible caracterizar los sistemas LIT digitales: calcular su salida, conocer sus propiedades, caracterizar asociaciones entre diferentes sistemas y poder relacionar fácilmente su relación entrada-salida con su respuesta impulsional.

## Ejercicios de autoevaluación

1. Sea la señal  $x[n] = u[n] - u[n - N]$ , siendo  $N \in \mathbb{Z}$ , con  $N \geq 1$ , y sea  $X(z)$  la expresión resultante de su transformada z. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

- a)  $X(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-N+2} + z^{-N+1}$  y su ROC es  $|z| > 1$ .
- b)  $X(z) = \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}}$  y su ROC es  $\forall z - \{z = 0\}$ .
- c)  $X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{z^{-N}}{1 - z^{-1}}$  y su ROC es  $|z| > 1$ .
- d)  $X(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-N+2} + z^{-N+1}$  y su ROC es  $\forall z$ .

2. Sea la señal  $x[n] = a^n$  para  $0 \leq n \leq N - 1$ , y  $x[n] = 0$  para el resto, siendo  $N \in \mathbb{Z}$ , con  $N \geq 1$ , y sea  $X(z)$  la expresión resultante de su transformada z. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

- a)  $X(z) = \frac{1 - a^N z^N}{1 - a z^{-1}}$  y su ROC es  $\forall z$ .
- b)  $X(z) = \frac{1 - a^N z^{-N}}{1 - a z^{-1}}$  y su ROC es  $\forall z$ .
- c)  $X(z) = \frac{1 - a^N z^N}{1 - a z^{-1}}$  y su ROC es  $\forall z - \{z = 0\}$ .
- d)  $X(z) = \frac{1 - a^N z^{-N}}{1 - a z^{-1}}$  y su ROC es  $\forall z - \{z = 0\}$ .

3. Sea la señal  $x[n] = \sin\left(\frac{3\pi}{4}n\right)$  y sea  $X(z)$  la expresión resultante de su transformada z. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

- a)  $X(z) = \frac{\sqrt{3/2}}{1 + (1/2)z^{-1} + z^{-2}}$  y su ROC es  $|z| > 1$ .
- b)  $X(z) = \frac{1 - (1/2)z^{-1}}{1 + (1/2)z^{-1} + z^{-2}}$  y su ROC es  $|z| > 1$ .
- c)  $X(z) = \frac{1 - (\sqrt{3/2})z^{-1}}{1 + (1/2)z^{-1} + z^{-2}}$  y su ROC es  $|z| > 1$ .
- d)  $X(z)$  no existe.

4. Sea la señal  $x[n] = 2^{-n}u[-n - 1] - 3^{-n}u[n]$  y sea  $X(z)$  la expresión resultante de su transformada z. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

- a)  $X(s) = \frac{1 - (5/12)z^{-1}}{1 - (5/6)z^{-1} + (1/6)z^{-2}}$  y su ROC es  $|z| > \frac{1}{2}$ .
- b)  $X(s) = 2 \frac{1 - (5/12)z^{-1}}{1 - (5/6)z^{-1} + (1/6)z^{-2}}$  y su ROC es  $|z| < \frac{1}{3}$ .
- c)  $X(s) = -2 \frac{1 - (5/12)z^{-1}}{1 - (5/6)z^{-1} + (1/6)z^{-2}}$  y su ROC es  $\frac{1}{3} < |z| < \frac{1}{2}$ .
- d)  $X(z)$  no existe.

5. Sea  $y[n - 1] - 3y[n] = x[n]$  la relación entrada-salida de un sistema LIT digital causal. ¿Cuál es su respuesta impulsional?

- a)  $h(t) = -\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} u[n]$
- b)  $h(t) = -3^{n+1} u[n]$
- c)  $h(t) = \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]$
- d)  $h(t) = (-3)^n u[n]$

6. De un sistema LIT digital solo se sabe que, ante la señal de entrada  $x[n] = \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]$ , su señal de salida es  $y[n] = 3(-1)^n \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) u[n]$ . ¿Cuál es su relación entrada-salida?

- a)  $y[n-2] + 3y[n-1] + 2y[n] = x[n]$
- b)  $y[n-2] + 3y[n-1] + 2y[n] = x[n-1] + 3x[n]$
- c)  $x[n-2] + 3x[n-1] + 2x[n] = y[n-1] + 3y[n]$
- d)  $x[n-2] + 3x[n-1] + 2x[n] = y[n]$

## **Solucionario**

### **Ejercicios de autoevaluación**

1. b
2. c
3. d
4. c
5. a
6. b

## Bibliografía

**Ogata, K.** (1996). *Sistemas de control en tiempo discreto* (2.<sup>a</sup> ed.). En: J. G. Aranda Pérez; F. Rodríguez Ramírez; G. Sánchez García (trads.). Pearson, Prentice Hall (capítulo 2 y apéndice B).

**Oppenheim, A. V.; Schafer, R. W.; Buck, J. R.** (1999). *Discrete-Time Signal Processing* (2.<sup>a</sup> ed.). Prentice Hall, Signal Processing Series (capítulos 3 y 5).

**Oppenheim, A. V.; Willsky, A. S.; Nawab, S. H.** (1996). *Signals & Systems* (2.<sup>a</sup> ed.). Prentice Hall, Signal Processing Series (capítulo 10 y apéndice).

**Palm III, W. J.** (2010). *Introduction to MATLAB for Engineers* (3.<sup>a</sup> ed.). McGraw-Hill.

**Proakis, J. G.; Manolakis, D. G.** (2007). *Digital Signal Processing* (4.<sup>a</sup> ed.). Prentice Hall (capítulo 3).