Prueba de Evaluación Continua_2 (PEC2)

Presentación

Esta PEC consta de 7 problemas que evalúan los conceptos adquiridos en el módulo 2.

Competencias

1. Conocimiento de materias básicas i tecnologías, que capaciten para el aprendizaje de nuevos métodos y nuevas tecnologías, y doten al estudiante de una gran versatilidad para adaptarse a nuevas situaciones.
2. Comprensión y dominio de los conceptos básicos de sistemas lineales y las funciones i transformaciones relacionadas, y su aplicación para la resolución de problemas propios de la ingeniería.
3. Capacidad para analizar, codificar, procesar i transmitir información multimedia empleando técnicas de procesamiento analógico i digital de la señal.

Objetivos

1. Conocer la definición de la TFSD así como su relación con la transformada Z
2. Aprender a calcular la TFSD de las señales típicas aperiódicas de más utilidad en el ámbito de procesado de señal.
3. Conocer y aplicar convenientemente las principales propiedades matemáticas de la TFSD.
4. Calcular la TFSD de señales discretas periódicas extendiendo así el uso de esta útil herramienta de cálculo.
5. Aplicar los conocimientos y propiedades de la TFSD para la caracterización y diseño de sistemas LIT digitales.

Descripción de la PEC a realizar

Resolver los problemas propuestos

Recursos

Apuntes y problemas resueltos del módulo 2 que se encuentran en el foro.

Formato y fecha de entrega

Se entregará editada y/o escaneada en un único archivo en formato PDF, con el siguiente nombre: apellidos_nombre_PEC2.pdf

Ejercicio 1 (1,5 puntos)

Calcula la transformada de Fourier de las siguientes señales discretas usando la definición de la TFSD

a) (0.5p)

$$x[n] = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n & n = 0,2,4,6,\dots \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

b) (0.5p)

$$x[n] = a^n \sin(w_0 n)\, u[n]$$

c) (0.5p)

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} u[-n-1]$$

Solución:

a)

$$X(e^{jw}) = \sum_{n=0,2,4,\dots} \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{-jwn} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2m} e^{-jw2m} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^m e^{-2jwm} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-2jw}} = X(e^{jw})$$

(haciendo el cambio de variable n=2m)

b)

$$\sin(w_0 n) = \frac{e^{jw_0 n} - e^{-jw_0 n}}{2j}$$

$$x[n] = \frac{1}{2j} a^n e^{jw_0 n} u[n] - \frac{1}{2j} a^n e^{-jw_0 n} u[n]$$

$$X(e^{jw}) = \frac{1}{2j}\sum_{n=0}^{\infty} (a)^n e^{-jwn} e^{jw_0 n} - \frac{1}{2j}\sum_{n=0}^{\infty} (a)^n e^{-jwn} e^{-jw_0 n}$$

$$= \frac{1}{2j}\sum_{n=0}^{\infty} (a)^n e^{-j(w-w_0)n} - \frac{1}{2j}\sum_{n=0}^{\infty} (a)^n e^{-j(w+w_0)n}$$

$$= \frac{1}{2j}\frac{1}{1-ae^{-j(w-w_0)}} - \frac{1}{2j}\frac{1}{1-ae^{-j(w+w_0)}} = X(e^{jw})$$

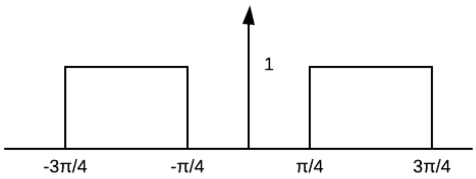
c)

$$X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} u[-n-1] e^{-jwn} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} e^{-jwn} = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^m e^{jwm} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^m e^{jwm} - 1$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-jw}} - 1 = \frac{1-1+\frac{1}{2}e^{jw}}{1-\frac{1}{2}e^{jw}} = \frac{1}{2}\frac{e^{jw}}{1-\frac{1}{2}e^{jw}} = X(e^{jw})$$

Ejercicio 2 (1 punto)

a) (0.5p) Calcula la TFSD inversa de $X(e^{jw})$ usando la expresión de síntesis (la integral)



b) (0.5p) Calcula la TFSD inversa de

$$X\left(e^{jw}\right) = \left|X\left(e^{jw}\right)\right| e^{j\sphericalangle X\left(e^{jw}\right)}$$

Donde

$$\left\{ \left|X\left(e^{jw}\right)\right| = \begin{cases} 1 & 0 \leq |w| < \frac{\pi}{4} \\ 0 & \frac{\pi}{4} \leq |w| < \pi \end{cases} \right.$$

$$e^{j\sphericalangle X\left(e^{jw}\right)} = -\frac{3w}{2}$$

Solución

a)

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{jw}\right) e^{jwn} dw = \frac{1}{2\pi}\int_{-3\pi/4}^{-\pi/4} e^{jwn} dw + \frac{1}{2\pi}\int_{\pi/4}^{3\pi/4} e^{jwn} dw$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{jn} e^{jwn}\Big|_{-3\pi/4}^{-\pi/4} + \frac{1}{2\pi}\frac{1}{jn} e^{jwn}\Big|_{\pi/4}^{3\pi/4}$$

$$= \frac{1}{2\pi jn}\left[e^{-jn\pi/4} - e^{-jn3\pi/4}\right] + \frac{1}{2\pi jn}\left[e^{jn3\pi/4} - e^{jn\pi/4}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi n}\left[\frac{e^{-jn\pi/4} - e^{-jn3\pi/4}}{2j}\right] - \frac{1}{\pi n}\left[\frac{e^{\frac{jn\pi}{4}} - e^{\frac{jn3\pi}{4}}}{2j}\right] = \frac{\sin\left(\frac{3}{4}\pi n\right)}{\pi n} - \frac{\sin\left(\frac{1}{4}\pi n\right)}{\pi n} = x[n]$$

esta expresión es válida para n distinto de 0

Para el caso n=0,:

$$x[0] = \frac{1}{2\pi}\int_{-3\pi/4}^{-\pi/4} e^{jw0} dw + \frac{1}{2\pi}\int_{\pi/4}^{3\pi/4} e^{jw0} dw = \frac{1}{2\pi}\int_{-3\pi/4}^{-\pi/4} dw + \frac{1}{2\pi}\int_{\pi/4}^{3\pi/4} dw == \frac{-\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}}{2\pi} + \frac{\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}}{2\pi} = \frac{1}{2}$$

$$= x[0]$$

b)

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{jw})e^{jwn}dw = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} e^{-jw3/2}e^{jwn}dw = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} e^{jw(-\frac{3}{2}+n)}dw =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{j(-\frac{3}{2}+n)}e^{jw(-\frac{3}{2}+n)}\Bigg|_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{j(-\frac{3}{2}+n)}\left[e^{j(-\frac{3}{2}+n)\frac{\pi}{4}} - e^{-j(-\frac{3}{2}+n)\frac{\pi}{4}}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{1}{(n-\frac{3}{2})}\left[\frac{e^{j(n-\frac{3}{2})\frac{\pi}{4}} - e^{-j(n-\frac{3}{2})\frac{\pi}{4}}}{2j}\right] = \frac{\sin\left((n-\frac{3}{2})\frac{\pi}{4}\right)}{\pi(n-\frac{3}{2})} = x[n]$$

Ejercicio 3 (2 puntos)

Determina los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de las siguientes secuencias periódicas

a) (1p) $x[n] = \sin\left(\frac{\pi(n-1)}{4}\right)$

b) (1p) $x[n] = \sin\left(\frac{\pi n}{8}\right) + 3\cos\left(\frac{\pi n}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$

En cada caso

(i) (0.1p) Calcula el período de la secuencia

(ii) (0.1p) Indica cuántos coeficientes distintos hay

(iii) (0.6p) Calcula el valor de todos los coeficientes según (ii)

(iv) (0.2p) Calcula el valor de los coeficientes a_{-10} y a_{17} de la secuencia (a) y los coeficientes a_{-17} y a_{46} de la secuencia (b)

Solución

a) $x[n] = \sin\left(\frac{\pi(n-1)}{4}\right)$

(i) período 8

(ii) hay 8 coeficientes distintos

(iii) $x[n] = \sin\left(\frac{\pi(n-1)}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}n - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2j}\left(e^{j\frac{\pi}{4}n - j\frac{\pi}{4}} - e^{-j\frac{\pi}{4}n + \frac{\pi}{4}}\right) = \frac{1}{2j}e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{j\frac{2\pi}{8}n} - \frac{1}{2j}e^{j\frac{\pi}{4}}e^{-j\frac{2\pi}{8}n}$

Por otra parte, sabemos que

$$x[n] = \sum_{n=0}^{N-1} a_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

Por lo tanto, es $a_1 = \frac{1}{2j}e^{-j\frac{\pi}{4}}$ y $a_{-1} = a_{-1+8} = a_7 = -\frac{1}{2j}e^{j\frac{\pi}{4}}$, y los demás coeficientes son 0, es decir $a_k = 0,\ \ k = 0,2,3,4,5,6$

(iv) $a_{-10} = a_{-10+16} = a_6 = 0$

$a_{17} = a_{16+1} = a_1 = \frac{1}{2j}e^{-j\frac{\pi}{4}}$

b) $x[n] = \sin\left(\frac{\pi n}{8}\right) + 3\cos\left(\frac{\pi n}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$

(i) Período de la señal

$\sin\left(\frac{\pi n}{8}\right)$ tiene período 16

$\cos\left(\frac{\pi n}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$ tiene período 8

Por lo tanto, el periodo de la suma es el mínimo común múltiplo entre los dos períodos, en este caso 16

(ii) Hay 16 coeficientes distintos

(iii) Aplicamos Euler para reescribir la señal en términos de senos y cosenos

$$x[n] = \sin\left(\frac{\pi n}{8}\right) + 3\cos\left(\frac{\pi n}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2j}\left(e^{j\frac{2\pi}{16}n} - e^{-j\frac{2\pi}{16}n}\right) + \frac{3}{2}\left(e^{j\frac{2\pi}{16}2n}e^{j\frac{\pi}{3}} + e^{-j\frac{2\pi}{16}2n}e^{-j\frac{\pi}{3}}\right)$$
$$= \frac{1}{2j}e^{j\frac{2\pi}{16}n} - \frac{1}{2j}e^{-j\frac{2\pi}{16}n} + \frac{3}{2}e^{j\frac{\pi}{3}}e^{j\frac{2\pi}{16}2n} + \frac{3}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}}e^{-j\frac{2\pi}{16}2n}$$

De aquí deducimos el valor de los coeficientes de la serie:

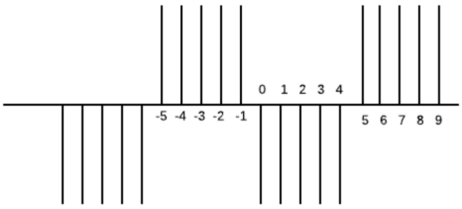
$a_1 = \frac{1}{2j}$, $a_{-1} = a_{-1+16} = a_{15} = -\frac{1}{2j}$, $a_2 = \frac{3}{2}e^{j\frac{\pi}{3}}$, $a_{-2} = a_{-2+16} = a_{14} = \frac{3}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}}$

$a_k = 0,\ \ k = 0,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13$

(iv) $a_{17} = a_{16+1} = a_1 = \frac{1}{2j}$ $a_{46} = a_{46-2x16} = a_{14} = \frac{3}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}}$

Ejercicio 4 (2 puntos)

a) (1 p) Considera la siguiente señal periódica x[n]



Usando las propiedades de las series de Fourier y sin evaluar explícitamente los coeficientes, responde si cada una de las siguientes relaciones es verdadera o falsa. Justifica cada respuesta

(i) (0.25p) $a_k = a_{k+10}\ \ \forall k$

(ii) (0.25p) $a_k = a_{-k}\ \ \forall k$

(iii) (0.25p) $a_k e^{jk\left(\frac{2\pi}{5}\right)}\ es\ real\ \ \forall k$

(iv) (0.25p) $a_0 = 0$

Solución

(i) es verdadero porque x[n] es periódica de período 10, los coeficientes se repiten en múltiplos de 10

(ii) es falso, porque la señal no es par

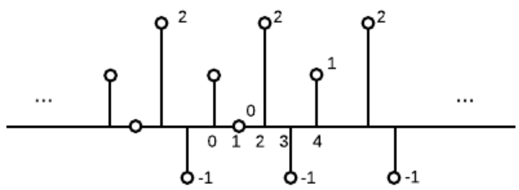
(iii) por la propiedad de desplazamiento, $a_k e^{jk(\frac{2\pi}{5})}$ son los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de la señal x[n] desplazada 2 muestras a izquierda $a_k e^{jk(\frac{2\pi}{5})} = a_k e^{-jk(\frac{2\pi}{10})(-2)}$, son los coeficientes de x[n+2] que es real y par, por lo tanto es verdadero

(iv) a_0 es el promedio de todos los elementos de la secuencia, como es periódica de período 10 con 5 muestras con valor 1 y cinco con valor -1 en cada período, la suma es 0, por lo tanto, la afirmación es verdadera

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$a_0 = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}0n} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]$$

b) (1 punto) Considera la siguiente secuencia



(i) (0.1p) Calcula el período

(ii) (0.3p) Calcula los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier. ¿Cuántos coeficientes distintos hay?

(iii) (0.3p) Escribe la expresión del desarrollo en Serie de Fourier, utilizando los coeficientes calculados en (ii)

(iv) (0.3p) Escribe la expresión de TFSD de x[n]

Solución

(i) el período es 4

(ii) hay 4 coeficientes distintos

Los coeficientes se obtienen con

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$a_k = \frac{1}{4}\left[x[0]e^{-j\frac{2\pi}{N}0k} + x[1]e^{-j\frac{2\pi}{N}k1} + x[2]e^{-j\frac{2\pi}{N}k2} + x[3]e^{-j\frac{2\pi}{N}k3}\right] = \frac{1}{4}\left[1 + 0 + 2e^{-j\frac{2\pi}{4}k2} - 1e^{-j\frac{2\pi}{4}k3}\right]$$
$$= \frac{1}{4}\left[1 + 0 + 2e^{-j\pi k} - e^{-j\frac{\pi}{2}k3}\right]$$

$$a_k = \frac{1}{4}\left[1 + 2e^{-j\pi k} - e^{-j\frac{\pi}{2}k3}\right]$$

Obtenemos el valor de cada coeficiente reemplazando la expresión anterior por k=0,1,2,3

$a_0 = \frac{1}{4}$[1 +2 -1] = $\frac{1}{2} = a_0$

$a_1 = \frac{1}{4}\left[1 + 2e^{-j\pi} - e^{-j\frac{\pi}{2}3}\right] = \frac{1}{4}[1\ \ -2\ -j] = \frac{-1-j}{4} = a_1$

$a_2 = \frac{1}{4}\left[1 + 2e^{-j\pi 2} - e^{-j\pi 3}\right] = \frac{1}{4}[1 + 2 + 1] = 1 = a_2$

$a_3 = \frac{1}{4}\left[1 + 2e^{-j\pi 3} - e^{-j\frac{\pi}{2}9}\right] = \frac{1}{4}[1 - 2 + j] = \frac{-1+j}{4} = a_3$

(iii) La expresión del desarrollo en serie de Fourier es la siguiente (para N=4):

$$x[n] = \sum_{n=0}^{3} a_k e^{j\frac{2\pi}{4}kn}$$

Reemplazando los valores de los coeficientes, queda:

$$x[n] = \frac{1}{2} + \frac{-1-j}{4} e^{j\frac{2\pi}{4}n} + e^{j\frac{2\pi}{4}2n} + \frac{-1+j}{4} e^{j\frac{2\pi}{4}3n} = \frac{1}{2} + \left(\frac{-1-j}{4}\right) e^{j\frac{\pi}{2}n} + e^{j\pi n} + \left(\frac{-1+j}{4}\right) e^{j\frac{\pi}{2}3n} = x[n]$$

(iv) La expresió de la TFSD de una secuencia periódica con coeficientes del desarrollo en serie de Fourier ak es la siguiente

$$X(e^{jw}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta\left(w - \frac{2\pi}{N}k\right)$$

Reemplazando los valores de k (sólo en un período), resulta

$$\begin{aligned} X(e^{jw}) &= 2\pi a_1 \delta\left(w - \frac{2\pi}{4}0\right) + 2\pi a_1 \delta\left(w - \frac{2\pi}{N4}\right) + 2\pi a_2 \delta\left(w - \frac{2\pi}{4}2\right) + 2\pi a_3 \delta\left(w - \frac{2\pi}{4}3\right) \\ &= 2\pi\frac{1}{2}\delta(w) + 2\pi\left(\frac{-1-j}{4}\right)\delta\left(w - \frac{\pi}{2}\right) + 2\pi\delta(w-\pi) + 2\pi\left(\frac{-1+j}{4}\right)\delta\left(w - \frac{3\pi}{2}\right) \\ &= \pi\delta(w) + \pi\left(\frac{-1-j}{2}\right)\delta\left(w - \frac{\pi}{2}\right) + 2\pi\delta(w-\pi) + \pi\left(\frac{-1+j}{2}\right)\delta\left(w - \frac{3\pi}{2}\right) = X(e^{jw}) \end{aligned}$$

Ejercicio 5 (1,5 puntos)

Considera un sistema con respuesta al impulso

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n cos\frac{\pi n}{2} u[n]$$

a) (0.5p) Calcula la respuesta frecuencial del sistema $H(e^{jw})$

(puedes utilizar tabla de propiedades y TFSD conocidas)

b) (1p) Sea

$$x[n] = cos\frac{\pi n}{2}$$

Calcula $y[n]$

Pista: puedes utilizar la siguiente propiedad,

$$cos\frac{\pi n}{2} = \frac{1}{2}e^{\frac{j\pi n}{2}} + \frac{1}{2}e^{\frac{-j\pi n}{2}}$$

y el hecho de que las exponenciales son autofunciones de los sistemas LTI. Es decir, si $x[n] = e^{jw_0 n}$ entra a un sistema lineal e invariante de respuesta frecuencial $H(e^{jw})$, la salida es $y[n] = H(e^{jw_0})e^{jw_0 n}$

Solución

a) La secuencia

$$h_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

Tiene transformada $H_1(e^{jw}) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-jw}}$

Por Euler, podemos escribir el coseno como. $cos\frac{\pi n}{2} = \frac{1}{2}e^{\frac{j\pi n}{2}} + \frac{1}{2}e^{\frac{-j\pi n}{2}}$

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n cos\frac{\pi n}{2}u[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\left(\frac{1}{2}e^{\frac{j\pi n}{2}} + \frac{1}{2}e^{\frac{-j\pi n}{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]e^{\frac{j\pi n}{2}} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]e^{\frac{-j\pi n}{2}}$$

Aplicamos propiedad de desplazamiento de la TFSD a cada término

$$H(e^{jw}) = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j(w-\frac{\pi}{2})}} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j(w+\frac{\pi}{2})}}$$

$$H(e^{jw}) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j(w-\frac{\pi}{2})}} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j(w+\frac{\pi}{2})}}\right]$$

b) Si $x[n] = cos\frac{\pi n}{2}$

Buscamos la salida del sistema para esta señal de entrada

$$cos\frac{\pi n}{2} = \frac{1}{2}e^{\frac{j\pi n}{2}} + \frac{1}{2}e^{\frac{-j\pi n}{2}}$$

Como las exponenciales son autofunciones de los sistemas lineales e invariantes

La salida del sistema para la exponencial $e^{\frac{j\pi n}{2}}$ será. $e^{\frac{j\pi n}{2}}H(e^{\frac{j\pi}{2}})$

Y la salida del sistema para la exponencial $e^{\frac{-j\pi n}{2}}$ será. $e^{\frac{-j\pi n}{2}}H(e^{\frac{-j\pi}{2}})$

Calculamos el valor de la función de transferencia del sistema $H(e^{jw})$ para las frecuencias de las exponenciales:

$$H(e^{jw})\big|_{w=\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2})}} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})}}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{0}} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\pi}}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{2}} + \frac{1}{1+\frac{1}{2}}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\frac{3}{2}}\right] = \frac{4}{3}$$

$$H(e^{jw})\big|_{w=-\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})}} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2})}}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\pi}} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{0}}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{2}} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\frac{3}{2}} + \frac{1}{\frac{1}{2}}\right] = \frac{4}{3}$$

Por lo tanto, será

$$y[n] = \frac{1}{2}e^{\frac{j\pi n}{2}}\frac{4}{3} + \frac{1}{2}e^{\frac{-j\pi n}{2}}\frac{4}{3} = \frac{2}{3}e^{\frac{j\pi n}{2}} + \frac{2}{3}e^{\frac{-j\pi n}{2}} = \frac{4}{3}\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) = y[n]$$

Ejercicio 6 (2 puntos)

Considera la siguiente ecuación en diferencias con coeficientes constantes

$$y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]=x[n]$$

Que describe un sistema lineal, invariante y causal

a) (0.5p) Calcula la respuesta frecuencial del sistema $H(e^{jw})$

b) (1.5p) Calcula y[n], la salida del sistema para cada una de las siguientes señales de entrada

(i) (0.5p) $x[n]=\delta[n]$

(ii) (0.5p) $x[n]=\delta[n-n_0]$

(iii) (0.5p) $x[n]=\left(\frac{3}{4}\right)^n u[n]$

Solución

a)

$$Y(e^{jw})-\frac{1}{2}Y(e^{jw})=X(e^{jw})$$

$$Y\left(e^{jw}\right)[1-\frac{1}{2}e^{-jw}]=X(e^{jw})$$

$$\frac{Y\left(e^{jw}\right)}{X(e^{jw})}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-jw}}=H(e^{jw})$$

b)

(i)

$$x[n]=\delta[n]$$

$$X\left(e^{jw}\right)=1$$

$$Y\left(e^{jw}\right)=X\left(e^{jw}\right)H\left(e^{jw}\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-jw}}$$

$$y[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

(ii)

$$x[n]=\delta[n-n_0]$$

$$X\left(e^{jw}\right)=e^{jwn_0}$$

$$Y\left(e^{jw}\right)=X\left(e^{jw}\right)H\left(e^{jw}\right)=e^{jwn_0}\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-jw}}$$

Por propiedad de desplazamiento de la TFSD:

$$y[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0}u[n-n_0]$$

(iii)

$$x[n] = \left(\frac{3}{4}\right)^n u[n]$$

$$X(e^{jw}) = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}e^{-jw}}$$

$$Y(e^{jw}) = X(e^{jw})H(e^{jw}) = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}e^{-jw}} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-jw}}$$

Descomponemos en fracciones simples

$$Y(e^{jw}) = \frac{A}{1 - \frac{3}{4}e^{-jw}} + \frac{B}{1 - \frac{1}{2}e^{-jw}}$$

$$A + B = 1$$

$$-\frac{1}{2}A - \frac{3}{4}B = 0$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones y queda

$$Y(e^{jw}) = \frac{3}{1 - \frac{3}{4}e^{-jw}} + \frac{-2}{1 - \frac{1}{2}e^{-jw}}$$

De aquí resulta

$$y[n] = 3\left(\frac{3}{4}\right)^n u[n] - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$