Prueba de Evaluación Continua_1 (PEC1)

Presentación
Esta PEC consta de 5 problemas para evaluar los conceptos adquiridos en el módulo1

Competencias

- Conocimiento de materias básicas i tecnologías, que capaciten para el aprendizaje de nuevos métodos y nuevas tecnologías, y doten al estudiante de una gran versatilidad para adaptarse a nuevas situaciones.
- Comprensión y dominio de los conceptos básicos de sistemas lineales y las funciones i transformaciones relacionadas, y su aplicación para la resolución de problemas propios de la ingeniería.
- Capacidad para analizar, codificar, procesar i transmitir información multimedia empleando técnicas de procesamiento analógico i digital de la señal.

Objetivos

- Calcular la Transformada Z. Caracterizar su ROC (Region of Convergence).
- Determinar a partir de la ROC si existe o no transformada discreta de Fourier.
- Definir el diagrama de polos y ceros.
- Calcular la transformada Z inversa.
- Operar con señales en el dominio de la Transformada Z

Descripción de la PEC a realizar
Resolver los problemas propuestos. Incluye en la solución los cálculos realizados para encontrar las transformadas inversas, raíces de polinomios, etc.

Recursos
Apuntes y problemas resueltos del módulo 1 que se encuentran en el foro.

Formato y fecha de entrega
Se entregará en formato PDF, con el siguiente nombre: apellidos_nombre_PEC1.pdf

Observación: incluye en la solución todos los cálculos realizados para encontrar las transformadas inversas, raíces de polinomios, etc.

EJERCICIO 1 (2 puntos)

a) Calcula la transformada Z de las siguientes secuencias usando la definición de la transformada Z (la ecuación de análisis.

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

e indicando su ROC. Nota: no se pueden usar las fórmulas de la Tabla1 ni de la Tabla2 de los apuntes.

a1) $x[n] = \left(\frac{1}{5}\right)^n u[-n]$

a2) $x[n] = \begin{cases} (-1)^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$

a1)

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n u[-n] z^{-n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{0} \left(\frac{1}{5}\right)^n z^{-n} = \sum_{m=0}^{\infty} (5z)^m = \lim_{L\to\infty} \sum_{m=0}^{L} (5z)^m = \lim_{L\to\infty} \frac{1-(5z)^{L+1}}{1-5z} = \frac{1}{1-5z}$$

Haciendo el cambio de variables m=-n

El sumatorio converge (el límite existe y finito) cuando $|5z| < 1$, es decir $|z| < 1/5$
Por lo tanto

$$X(z) = \frac{1}{1-5z}, \qquad \text{con ROC } |z| < 1/5$$

a2)

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n u[n] z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{z}\right)^n = \lim_{L\to\infty} \sum_{n=0}^{L} \left(-\frac{1}{z}\right)^n = \lim_{L\to\infty} \frac{1-(-1/z)^{L+1}}{1-(-\frac{1}{z})} = \frac{1}{1+z^{-1}},$$

El sumatorio converge si $|-1/z| < 1$, o $|z| > 1$
Por lo tanto

$$X(z) = \frac{1}{1+z^{-1}}, \qquad \text{con ROC } |z| > 1$$

b) Calcula la transformada Z de las siguientes secuencias usando propiedades de la transformada Z y expresiones de transformadas conocidas (Tabla1 y Tabla2 de los apuntes)

b1) $x[n] = 3\delta[n] - \delta[n-3] + \left(\frac{1}{2}\right)^{n} u[n+2] + 3^{n}u[-n-1]$

b2) $x[n] = |n|\left(\frac{1}{3}\right)^{|n|}$

Pistas: escribir $x[n] = |n|\left(\frac{1}{3}\right)^{|n|} = n\left(\frac{1}{3}\right)^{n} u[n] - n\left(\frac{1}{3}\right)^{-n} u[-n]$, y utilizar la propiedad de inversión temporal de la TZ: si $x[n] \leftrightarrow X[z]$ con ROC R, entonces $x[-n] \leftrightarrow X[z^{-1}]$, con ROC=1/R

b1) $x[n] = 3\delta[n] - \delta[n-3] + \left(\frac{1}{2}\right)^{n} u[n+2] + 3^{n}u[-n-1] =$

analizamos la señal por partes:

A) $3\delta[n] - \delta[n-3]$: la TZ es. $3 - z^{-3}$

B). $\left(\frac{1}{2}\right)^{n} u[n+2] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} u[n+2] = 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} u[n+2]$

Por la propiedad de desplazamiento , su TZ es $4z^{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$ con ROC $|z| > \frac{1}{2}$

C) $3^{n}u[-n-1]$, su TZ es $-\frac{1}{1-3z^{-1}}$ con ROC $|z| < 3$

Por lo tanto

$$X(z) = 3 - z^{-3} + 4z^{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{1}{1-3z^{-1}}$$

con ROC $\frac{1}{2} < |z| < 3$

b2) $x[n] = |n|\left(\frac{1}{3}\right)^{|n|} = n\left(\frac{1}{3}\right)^{n} u[n] - n\left(\frac{1}{3}\right)^{-n} u[-n]$

sabemos que

$\left(\frac{1}{3}\right)^{n} u[n]$, tiene TZ es $\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$ con ROC $|z| > 1/3$

Por propiedad de derivación, si x[n] tiene TZ X(z), sabemos que nx[n] tiene TZ -z dX/dz

Por lo tanto: si $w[n] = n\left(\frac{1}{3}\right)^{n} u[n]$, su transformada Z es

$$W(z) = -z\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}\right) = -z\frac{-\frac{1}{3}z^{-2}}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)^{2}} = \frac{\frac{1}{3}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)^{2}}$$

En el segundo término se aplica la propiedad de inversión temporal, la TZ es $\frac{\frac{1}{3}z}{\left(1-\frac{1}{3}z\right)^2}$

$$X(Z) = \frac{\frac{1}{3}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)^2} + \frac{\frac{1}{3}z}{\left(1-\frac{1}{3}z\right)^2} = \frac{3z}{(3z-1)^2} + \frac{3z^{-1}}{(3z^{-1}-1)^2}$$

Con ROC $\frac{1}{3} < |z| < 3$

EJERCICIO 2 (2 puntos)

a) Calcula la transformada Z inversa de

$$\mathrm{X(z)} = \frac{1 + z^{-1} - \frac{1}{4}z^{-2} - \frac{1}{4}z^{-3}}{1 - z^{-1}} \qquad \mathrm{ROC}\ |z| > 1$$

a1) Calculando el cociente de los polinomios y descomponiendo en fracciones simples: escribimos los polinomios en potencias decrecientes de z-1

$$\begin{array}{l|l}
-\frac{1}{4}z^{-3} - \frac{1}{4}z^{-2} + z^{-1} + 1 & 1 - z^{-1} \\ \cline{2-2}
+\frac{1}{4}z^{-3} - \frac{1}{4}z^{-2} & \frac{1}{4}z^{-2} + \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{2} \\ \cline{1-1}
\qquad -\frac{1}{2}z^{-2} + z^{-1} & \\
\qquad +\frac{1}{2}z^{-2} - \frac{1}{2}z^{-1} & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad +\frac{1}{2}z^{-1} + 1 & \\
\qquad\qquad -\frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{2} & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad +\frac{3}{2} &
\end{array}$$

Entonces:

$$\mathrm{X(z)} = \frac{1+z^{-1}-\frac{1}{4}z^{-2}-\frac{1}{4}z^{-3}}{1-z^{-1}} = \frac{1}{4}z^{-2} + \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{2} + \frac{\frac{3}{2}}{1-z^{-1}} \qquad \mathrm{ROC}\ |z| > 1$$

Calculamos la TZ inversa de cada término, considerando que la señal es causal ya que la ROC es exterior al círculo de radio 1.

$$x[n] = \frac{1}{4}\delta[n-2] + \frac{1}{2}\delta[n-1] - \frac{1}{2}\delta[n] + \frac{3}{2}u[n]$$

a2) Utilizando la función Matlab 'residuez'

$B = [1\ \ 1\ \ -\frac{1}{4}\ \ -\frac{1}{4}\,]$

$A = [1\ \ -1\,]$

\>> [AC, p, d] = residuez(B,A)

AC = 1.5 = 3/2

p=1

d = [- ½ ½ ¼]

Entonces:
$x[n]=\frac{1}{4}\delta[n-2]+\frac{1}{2}\delta[n-1]-\frac{1}{2}\delta[n]+\frac{3}{2}u[n]$

b) Considera la siguiente expresión de una transformada Z

$$X(z)=\frac{3}{1+\frac{1}{2}z^{-1}-\frac{1}{2}z^{-2}}$$

Calcula la Transformada Z inversa para cada posible ROC

Buscamos las raíces del denominador (en potencias de z): $1+\frac{1}{2}z^{-1}-\frac{1}{2}z^{-2}=z^{-2}(z^2+\frac{1}{2}z-\frac{1}{2})$,
Raíces del polinomio $(z^2+\frac{1}{2}z-\frac{1}{2})$, las raíces son z=-1, z=1/2
$z^{-2}\left(z^2+\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}\right)=z^{-2}\left(z-\frac{1}{2}\right)(z+1)=(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+z^{-1})=$

$$X(z)=\frac{3}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+z^{-1})}=\frac{A}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})}+\frac{B}{(1+z^{-1})}$$

$$A(1+z^{-1})+B\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)=3$$

$$A+B=3$$

$$A-\frac{1}{2}B=0$$

Resolviendo las ecuaciones, resulta A=1, B=2

$$X(z)=\frac{1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})}+\frac{2}{(1+z^{-1})}$$

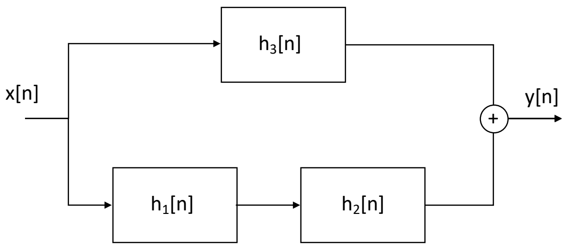
Ahora , teniendo en cuenta los polos z=1/2 y z=-1, tenemos tres posibles ROCs:

a) |z|<1/2 $x[n]=-\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]-2(-1)^n u[-n-1]$

b) ½ < |z| < 1 $x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]-2(-1)^n u[-n-1]$

c) |z|>1 $x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]+2(-1)^n u[n]$

EJERCICIO 3 (2 puntos)
Considera el siguiente sistema lineal e invariante,



Donde $h1[n] = \delta[n-1]$, $h2[n] = u[n]$, $h3[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$

a) Calcula la función de transferencia del sistema H(z)

b) Dibuja el diagrama de polos y ceros de H(z) y especifica su ROC.

c) Analiza la causalidad y estabilidad del sistema

a) La respuesta al impulso del sistema es $h[n] = (h_1[n].h_2[n]) + h_3[n]$

La función de transferencia: $H[n] = (H_1[n].H_2[n]) + H_3[n]$

Calculamos la TZ de cada subsistema:

$$\mathrm{H_1(z) = z^{-1}} \;, \quad \mathrm{H(z)} = \frac{1}{1-\mathrm{z}^{-1}}, \quad \mathrm{H_2(z)} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}\mathrm{z}^{-1}}$$

$$\mathrm{ROC1}\ |\mathrm{z}| > 0, \qquad \mathrm{ROC2}\ |\mathrm{z}| > 1, \qquad \mathrm{ROC3}\ |\mathrm{z}| > 1/4$$

Reemplazando

$$H[n] = \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} + \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$

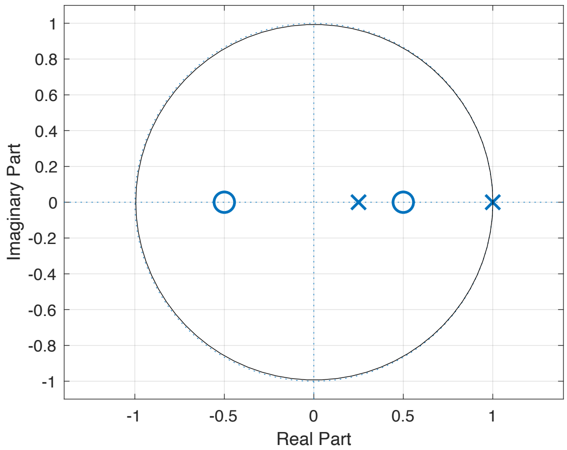
ROC : $|\mathrm{z}| > 1$ (intersección ROCs)

b)

$$\mathrm{H[n]} = \frac{\mathrm{z}^{-1}}{1-\mathrm{z}^{-1}} + \frac{1}{1-\frac{1}{4}\mathrm{z}^{-1}} = \frac{\mathrm{z}^{-1}\left(1-\frac{1}{4}\mathrm{z}^{-1}\right) + (1-\mathrm{z}^{-1})}{(1-\mathrm{z}^{-1})(1-\frac{1}{4}\mathrm{z}^{-1})} = \frac{\left(1-\frac{1}{4}\mathrm{z}^{-2}\right)}{(1-\mathrm{z}^{-1})(1-\frac{1}{4}\mathrm{z}^{-1})}$$

$$= \frac{(1-\frac{1}{2}\mathrm{z}^{-1})(1+\frac{1}{2}\mathrm{z}^{-1})}{(1-\mathrm{z}^{-1})(1-\frac{1}{4}\mathrm{z}^{-1})}$$

Polos: z=1, z= 1/4 Ceros: z= 1/2 , z=-1/2 ROC: |z|>1



c) No es estable, la ROC no contiene al círculo unitario
Es causal, la ROC es exterior a una circunferencia (el sistema es combinación de sistemas causales)

EJERCICIO 4 (2 puntos)
Un sistema causal lineal e invariante tiene función de transferencia

$$H(Z) = \frac{1+z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

a) Calcula X(z), la transformada Z de una señal x[n] que produce la siguiente salida

$$y[n] = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] - \frac{4}{3}(2)^n u[-n-1]$$

b) A partir de $H(z)$ encuentra la ecuación en diferencias que representa al sistema
c) Dibuja el diagrama de bloques del sistema

a)

$$Y(Z) = \frac{-\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{\frac{4}{3}}{1-2z^{-1}} = \frac{-\frac{1}{3}(1-2z^{-1}) + \frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)(1-2z^{-1})} = \frac{1+\frac{1}{3}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)(1-2z^{-1})}$$

$$X(Z) = \frac{Y(z)}{H(z)} = \frac{\left(1+\frac{1}{3}z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)(1-2z^{-1})} \frac{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}{(1+z^{-1})} = \frac{A}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)} + \frac{B}{(1-2z^{-1})} + \frac{C}{(1+z^{-1})}$$

A=$\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)X(z)\Big|_{z=1/4} = \frac{1}{15}$

B=$(1-2z^{-1})X(z)\Big|_{z=2} = \frac{2}{3}$

C=$(1+z^{-1})X(z)\Big|_{z=-1} = \frac{4}{15}$

Hallar x[n]:

Como h[n] es causal, la región de convergencia para H(z) es |z|>1/2
Con la región de convergencia de Y(z), el anillo ¼ < |z|<2, la región de convergencia de X(z) es ¼<|z|<2.
Por lo tanto

$$x[n]=\frac{1}{15}\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]-\frac{2}{3}(2)^n u[-n-1]-\frac{4}{15}(-1)^n u[-n-1]$$

b) Ecuación en diferencias

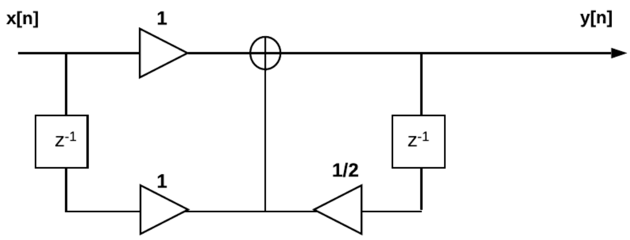
$$\mathrm{H(Z)}=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1+\mathrm{z}^{-1}}{1-\frac{1}{2}\mathrm{z}^{-1}}$$

$$\mathrm{Y(Z)}\left(1-\frac{1}{2}\mathrm{z}^{-1}\right)=\mathrm{X(z)}(1+\mathrm{z}^{-1})$$

$$Y(z)-\frac{1}{2}Y(z)\mathrm{z}^{-1}=X(z)+X(z)\mathrm{z}^{-1}$$

$$y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]=x[n]+x[n-1]$$

c) Diagrama de bloques

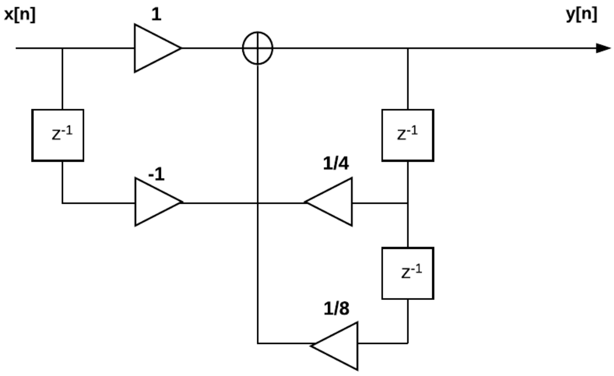


EXERCICIO 5 (2 puntos)
Considera un sistema lineal, invariante y causal caracterizado por la siguiente ecuación en diferencias

$$\mathrm{y[n]}=\frac{1}{4}\mathrm{y[n-1]}+\frac{1}{8}\mathrm{y[n-2]}+\mathrm{x[n]}-\mathrm{x[n-1]}$$

a) Dibuja el diagrama de bloques que caracteriza el sistema
b) Calcula la función de transferencia H (z), dibuja el diagrama de ceros y polos y la ROC
c) Calcula $y[n]$, la respuesta del sistema para la secuencia de entrada $x[n]=u[n]$ trabajando en el dominio de la transformada Z.

a)

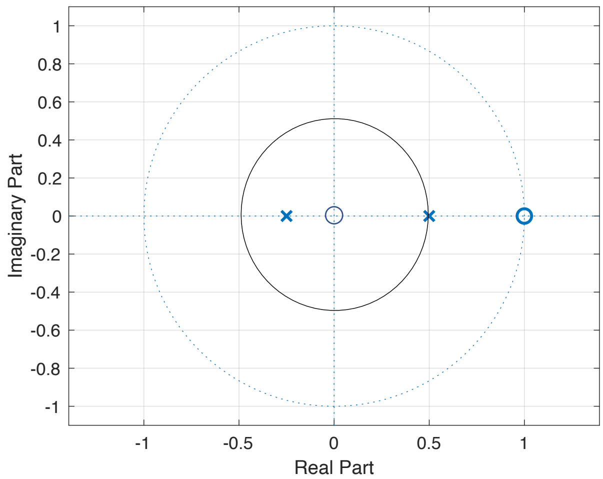


b) $y[n]-\frac{1}{4}y[n-1]-\frac{1}{8}y[n-2]=x[n]-x[n-1]$

$Y(z)[1-\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{1}{8}z^{-2}]=X(z)[1-z^{-1}]$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{[1-z^{-1}]}{[1-\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{1}{8}z^{-2}]}$$

Ceros z=0, z=1.   Polos z= 1/2 , z= - 1/4   ROC |z|>1/2



c) $x[n]=u[n]$, su TZ es $X(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}$, ROC |z|>1

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} \frac{[1-z^{-1}]}{[1-\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{1}{8}z^{-2}]} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{1}{8}z^{-2}} = \frac{1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+\frac{1}{4}z^{-1})}$$

$$= \frac{A}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})} + \frac{B}{(1+\frac{1}{4}z^{-1})}$$

$$A\left(1+\tfrac{1}{4}z^{-1}\right) + B\left(1-\tfrac{1}{2}z^{-1}\right) = 1$$

$$A + B = 1$$

$$\frac{1}{4}A - \frac{1}{2}B = 0$$

Resolviendo el sistema, resulta A=2/3, B= 1/3

$$Y(z) = \frac{2/3}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})} + \frac{1/3}{(1+\frac{1}{4}z^{-1})} \quad |z| > 1/2$$

$$y[n] = 2/3\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 1/3\left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$